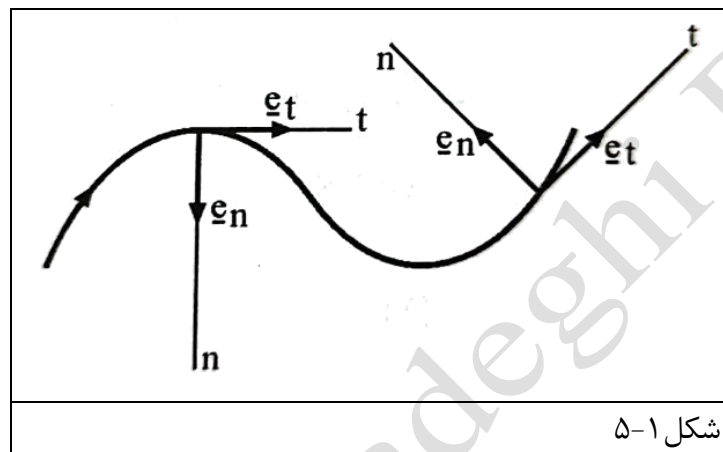


جلسه چهارم

مختصات مماس و نرمال (t و n)

یکی از دستگاه‌های مختصات مناسب جهت بررسی حرکت ذره ای در صفحه مماس و نرمال می باشد بدین معنی که می توان در هر لحظه یک دستگاه مختصات را بر ذره منتقل کرد به طوری که یک محور مماس بر مسیر و محور دیگر عمود بر آن باشد



صفحه ای که در آن چنین حرکتی اتفاق می افتد را با فرض حرکت ذره در فضا به صورت صفحه ای (یعنی دوبعدی) در هر لحظه بوسان می گویند که دو بردار e_t و e_n در آن قرار دارد. برای دستگاه مختصات بالا سرعت و شتاب عبارت اند از:

سرعت :

$$\vec{V} = v\vec{e}_t$$

$$V = \dot{S}$$

شتاب :

$$\vec{a} = \dot{v}\vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n$$

$$a_t = \dot{v} = \ddot{s}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

$$|a| = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$$

در روابط فوق a_t مولفه مماس شتاب است و معرف تغییرات اندازه بردار است و a_n مولفه نرمال شتاب بوده و معرف تغییرات راستای بردار سرعت است و تابعی از شکل هندسی مسیر است و ρ شعاع انحنای مسیر در لحظه بررسی حرکت است.

همانند روابط مربوط به دستگاه مختصات X و Y در اینجا نیز رابطه مشابه شرح زیر وجود دارد :

$$\omega d\omega = \alpha d\theta$$

که در آن ω سرعت زاویه ای

α شتاب زاویه ای

θ تغییرات زاویه می باشد

شعاع انحنای حرکت

شعاع انحنای مسیر را می توان به:

۱- روش ریاضی : هنگامی که منحنی مسیر به صورت $y=y(x)$ معلوم باشد شعاع انحنای مسیر از رابطه زیر بدست می آید

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}$$

۲- روش ضرب خارجی سرعت در شتاب : با ضرب خارجه بردار های سرعت و شتاب رابطه زیر جهت محاسبه شعاع انحنای به دست می آید

$$\rho = \frac{v^3}{|\vec{V} \cdot \vec{a}|}$$

$$\rho = \frac{\sqrt{(v_x^2 + v_y^2)^3}}{|v_x a_y - v_y a_x|}$$

$$\det \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \vec{A} \times \vec{B}$$

۳- با استفاده از تعریف شتاب در مختصات مماس نرمال

$$a^2 = a_t^2 + a_n^2$$

$$a^2 = \dot{v}^2 + \frac{v^4}{\rho^2}$$

$$a^2 - \dot{v}^2 = \frac{v^4}{\rho^2} \Rightarrow \rho^2 = \frac{v^4}{a^2 - \dot{v}^2}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sqrt{a^2 - \dot{v}^2}}{v^2}$$

مثال: در مسیر دایره ای شکلی که یک هواپیما از آن عبور می کند در زمان عبور از نقطه ای مانند A روی مسیر شتاب کل هواپیما 20 m/s^2 اگر سرعت هواپیما 720 km/h باشد و با نرخ 36 km/h افزایش یابد شعاع مسیر در نقطه A چقدر است

$$V = 720 \text{ km/h} \times \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \times \frac{1000}{1 \text{ km}} = 200 \text{ m/s}$$

شتاب در راستای مماس

$$\dot{v} = a_t = 36 \text{ km/h} \times \frac{1}{3/6} \Rightarrow a_t = 10 \text{ m/s}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sqrt{a^2 - \dot{v}^2}}{v^2} \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{\sqrt{20^2 - 10^2}}{(200)^2} \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{\sqrt{300}}{400000} \Rightarrow \rho = 2310 \text{ m}$$