

مکانیک سیالات ۱

جلسه اول

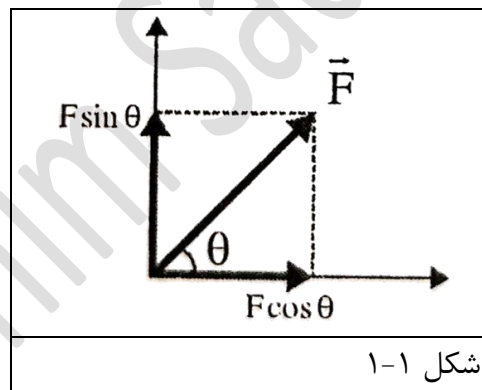
فصل اول: مقدمه و یادآوری

نیرو: اثر یک جسم به جسم دیگر نیرو نامیده می شود. نیرو یک کمیت برداری می باشد. مشخصه نیرو عبارت است از اندازه جهت و نقطه اثر آن کلیه عملیات مربوط به بردار ها برای نیروها نیز صادق می باشد.

واحد نیرو: واحد نیرو در سیستم بین المللی SI نیوتن N و در سیستم مرسوم آمریکایی $USCU$ پوند lb می باشد. هر ۱۰۰۰ نیوتن را با کیلو نیوتن KN و هر هزار پوند را با Kip نمایش می دهند.

تصویر نیرو بر روی محور: برای به دست آوردن تصویر نیرو (مولفه نیرو) بر روی یک محور، مقدار نیرو را در کسینوس زاویه بین نیرو و محور ضرب می کنیم.

نمایش نیرو: نیرو را مانند بردار با یک پاره خط جهت دار (پیکان) نمایش می دهند. در مختصات کارتزین (x, y) نیرو را می توان به وسیله مولفه هایش در جهات x و y به صورت زیر نشان داد:



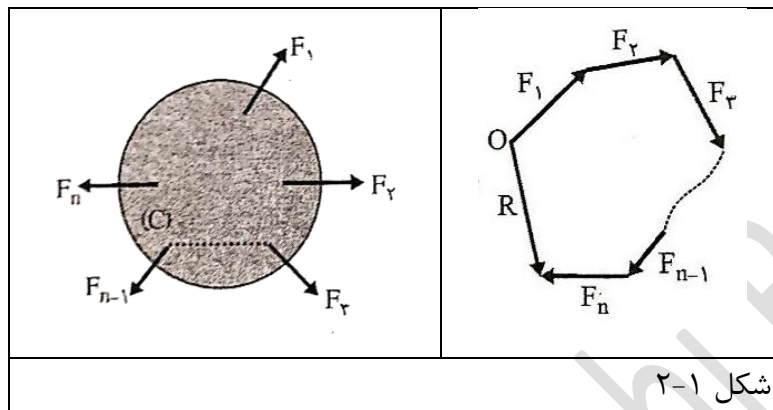
$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} = (F \cos \theta) \vec{i} + (F \sin \theta) \vec{j}$$

که در آن F اندازه نیرو و $\vec{i}$ و $\vec{j}$ بردارهای واحد در جهات x و y هستند.

در حالت فضایی (سه بعدی) نیروی F را می توان به صورت های زیر نمایش داد:

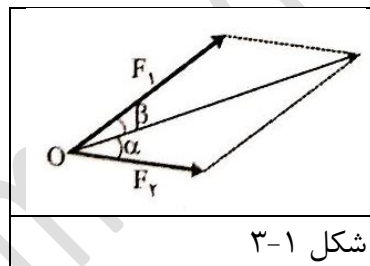
برآیند نیروها در حالت دو بعدی: برآیند (مجموع) چند نیرو را می توان به روش ترسیمی یا تحلیلی بدست آورد.

الف) روش ترسیمی: برای به دست آوردن برآیند نیروهای $F_1, F_2, \dots, F_n$ که بر جسم وارد می شوند، ابتدا از نقطه O نیروی موازی و مساوی F_1 رسم می کنیم. از انتهای نیروی F_1 نیروی موازی و مساوی F_2 را رسم می کنیم. به همین ترتیب تا نیروی n ام ادامه می دهیم. برآیند n نیرو، از اتصال ابتدای نیروی F_1 به انتهای نیرو F_n به دست می آید (R) .



شکل ۱-۲

در حالت خاص، برآیند دو نیرو که با یکدیگر زاویه θ می سازند با استفاده از قانون کسینوس ها در مثلث برابر است با:



شکل ۱-۳

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + F_1 F_2 \cos \theta, (\theta = \alpha + \beta)$$

زاویه بین نیروها با نیروی برآیند را می توان با استفاده از قانون سینوس ها در مثلث به دست آورد.

$$\frac{R}{\sin \theta} = \frac{F_1}{\sin \alpha} = \frac{F_2}{\sin \beta}$$

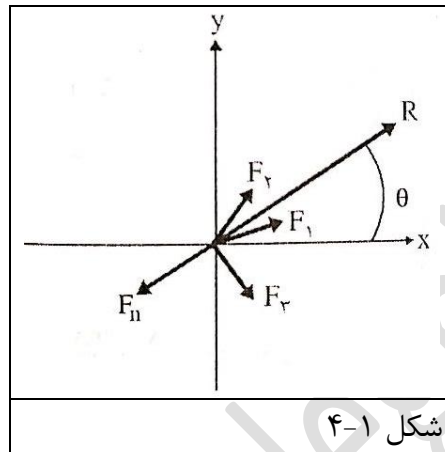
ب) روش تحلیلی: در این روش ابتدا نیروهایی که به جسم وارد می شوند را در دستگاه مختصات $(x - y)$ نمایش می دهیم در این حالت برآیند نیروهای $F_1, F_2, \dots, F_n$ برابر است با:

$$R = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2}, \tan \theta = \frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x}$$

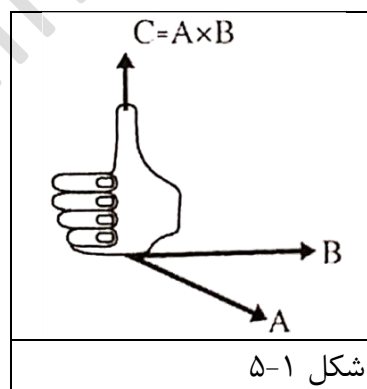
که در آن R اندازه برآیند نیروها، ΣF_x مجموع مولفه های (تصاویر) نیروها روی محور x ، ΣF_y مجموع مولفه های (تصاویر) نیروها روی محور y و θ زاویه برآیند نیروها با محور x می باشد.

بنابراین بردار برآیند نیروها در حالت دو بعدی را می توان به صورت زیر نشان داد:

$$\vec{R} = (\Sigma F_x) \vec{i} + (\Sigma F_y) \vec{j}$$



حاصل ضرب خارجی (بردار) دو بردار: حاصل ضرب خارجی دو بردار یک کمیت برداری است که اندازه آن برابر با حاصل ضرب اندازه دو بردار در سینوس زاویه بین دو بردار. راستای آن عمود بر صفحه دو بردار است و جهت آن از قانون دست راست مطابق شکل تعیین می گردد.



در صورتی که اندازه حاصل ضرب دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ برابر C باشد مقدار برابر است با:

$$C = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta$$

که در آن $|\vec{A}|$ و $|\vec{B}|$ اندازه دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و θ زاویه بین دو بردار می باشد.

در صورتی که دو بردار به وسیله مولفه های شان نمایش داده شده باشند، مانند $\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$ و $\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$ در این حالت بردار حاصل ضرب خارجی آنها از بسط دترمینان زیر حاصل می گردد.

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \det \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{C} = (A_y B_z - A_z B_y) \vec{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \vec{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \vec{k}$$

پیکر آزاد یا دیاگرام آزاد (Free Body Diagram): برای رسم پیکر آزاد کلیه مسائل تعادل، باید جسم

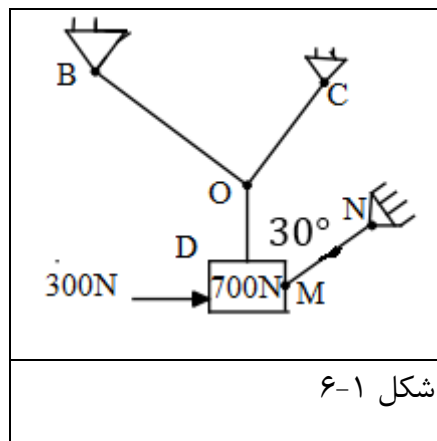
را به صورت نقطه مادی در نظر گرفت و مراحل زیر را انجام داد:

- (۱) ابتدا نقطه مادی را به صورت تنها در نظر می گیریم یعنی کلیه اعضای متصل به آن را جدا می کنیم
- (۲) کلیه نیروهایی که به نقطه مادی چه به صورت مستقیم و چه به صورت غیر مستقیم از طرف دیگر اعضا در نقطه اتصال به نقطه مادی اعمال می شد، مشخص می کنیم
- (۳) نیروهای معلوم را با مقدار و جهت به نقطه مادی اعمال می کنیم، در صورتی که یک نیرو دارای امتداد مشخص و مقدار مجهول باشد، آن را به صورت یک بردار در آن امتداد نشان داده و جهت آن را به دلخواه انتخاب می کنیم. در صورتی که علامت نیروی مجهول پس از محاسبه منفی به دست آمد، باید جهت در نظر گرفته شده را بر عکس نشان دهیم.

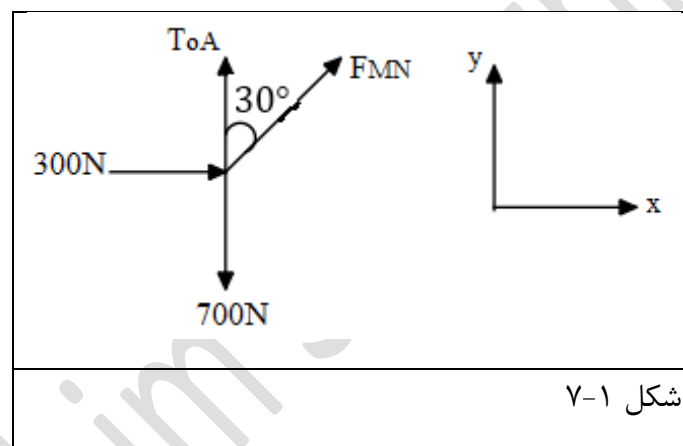
به عنوان مثال شکل زیر را در نظر بگیرید.

برای پیدا کردن نیروهای مجهول وارد به وزنه ۷۰۰ نیوتونی

ابتدا باید پیکر آزاد آن را رسم کنیم و داریم:



باید توجه داشت که کابل فقط نیروی کششی تحمل می کند بنابراین جهت T_{OA} مشخص است و فقط باید مقدار آن را محاسبه کرد



امتداد نیروی F_{MN} روی میله MN قرار دارد، اما مقدار جهت آن مشخص نیست بنابراین امتداد آن را در راستای F_{MN} و جهت را به صورت دلخواه کششی فرض می کنیم
حال باید تعادل را در جهات x و y نوشت و داریم:

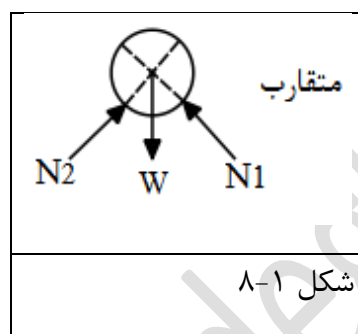
$$\sum F_x = 0 \rightarrow 300 + F_{MN} \sin 30^\circ = 0 \rightarrow F_{MN} = -600N$$

جهت در نظر گرفته شده باید به عکس شود (فشاری)

$$\sum F_y = 0 \rightarrow T_{OA} - 700 - 600 \cos 30 = 0 \rightarrow T_{OA} = 1219.6N$$

جسم صلب: جسمی است که فاصله نسبی نقاط آن قبل و بعد از بارگذاری تغییر نکند به عبارت دیگر تغییر شکل ندهد.

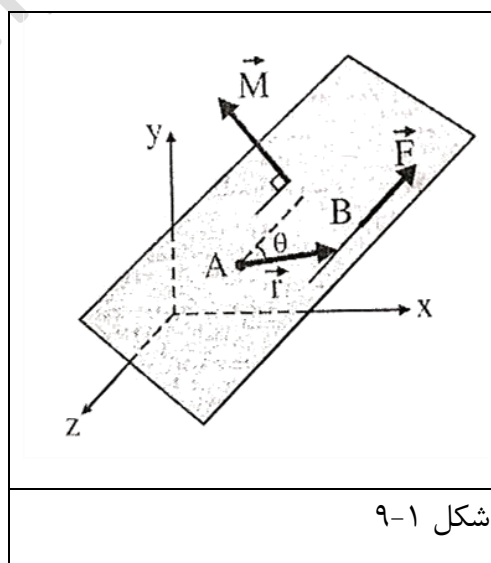
نکته: در تعادل نقطه مادی نیروهای وارد متقارب می باشند اما در تعادل اجسام صلب نیروها الزاماً متقارب نیستند و می توانند باعث دوران جسم صلب شوند، از این روی علاوه بر تعادل نیروها باید تعادل کوپل ها و گشتاورها نیز برقرار باشد. (متقارب یعنی نیروها یا امتداد نیروها یکدیگر را در یک نقطه قطع می کنند)



گشتاور نیرو حول یک نقطه:

گشتاور نیروی $\vec{F}$ حول نقطه ی A برابر است با حاصل ضرب خارجی بردار $\vec{r}$ در نیروی $\vec{F}$ یعنی:

$$\vec{M}_A = \vec{r} \times \vec{F}$$



ابتدای بردار $\vec{r}$ در نقطه ی A و انتهای آن در یک نقطه ی دلخواه مانند B روی بردار $\vec{F}$ یا امتداد آن می باشد. بنابراین $\vec{M}$ یک کمیت برداری است که اندازه ی آن برابر حاصلضرب اندازه بردارهای $\vec{r}$ و $\vec{F}$ در سینوس زاویه ی بین آن ها می باشد، یعنی:

$$|\vec{M}| = |\vec{r}| \times |\vec{F}| \sin \theta$$

امتداد $\vec{M}$ طبق قانون دست راست تعیین می گردد.

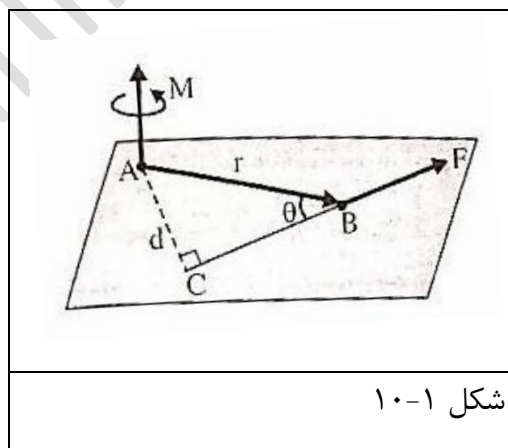
در صورتی که $\vec{r} = r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k}$ و $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$ باشد آنگاه گشتاور نیروی $\vec{F}$ حول نقطه ی A به صورت زیر محاسبه می گردد.

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \det \begin{vmatrix} i & j & k \\ r_x & r_y & r_z \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}$$

که در آن $r_x = x_B - x_A$ و $r_y = y_B - y_A$ و $r_z = z_B - z_A$ می باشند که F_x ، F_y و F_z مؤلفه های نیرو در راستاهای x، y و z هستند.

می توان شکل ساده تری برای گشتاور در حالت دو بعدی حول یک نقطه به صورت زیر ارائه داد.

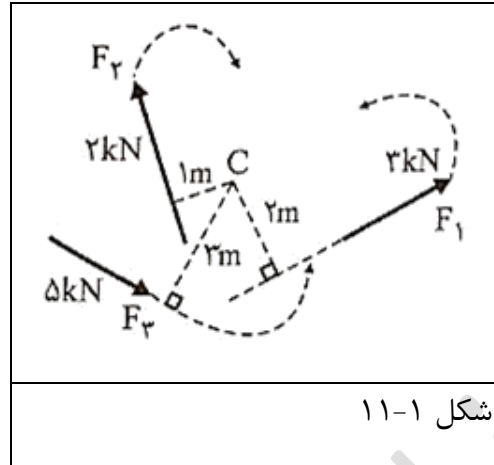
$$M = Fr \sin \theta = Fd$$



شکل ۱-۱۰

برای پیدا کردن مقدار گشتاور نیروی $\vec{F}$ حول نقطه ی A می توان به کمترین فاصله بین نقطه ای A و امتداد نیروی $\vec{F}$ را با d نشان داد، حاصلضرب $\vec{F}$ در d مقدار گشتاور را خواهد داد. (کوتاه ترین فاصله یک

نقطه تا یک خط T فاصله ی عمودی آن است). به عنوان مثال گشتاور در نیروهای داده شده را حول نقطه ی C محاسبه کنید.



شکل ۱-۱۱

$$\Sigma M_C = +3000N * 2m - 2000N * 1m + 5000N * 3m = 19000N.m \quad C.C.W$$

علامت C.C.W مخفف Counter Clock Wise یعنی پاد ساعت گرد می باشد و معمولاً مثبت در نظر گرفته می شود، علامت C.W مخفف Clock Wise یعنی ساعتگرد می باشد و معمولاً منفی در نظر گرفته می شود

تعالادل اجسام صلب در حالت دو بعدی:

تعالادل اجسام صلب دو بعدی یکی از کاربردی ترین مسائل استاتیک می باشد که عموماً در رشته معماری برای تیرها و خرپاها کاربرد دارد، با توجه به این که در جسم صلب نیروها الزاماً متقارب نیستند برای تعادل، علاوه بر تعادل نیروها باید تعادل گشتاورها نیز برقرار باشد. یعنی یکی از حالات زیر اتفاق افتد:

$$\begin{aligned} ۱. & \begin{cases} \sum f_x = 0 \\ \sum f_y = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{cases} \\ ۲. & \begin{cases} \sum f_x (\sum f_y \text{ یا}) = 0 \\ \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 \end{cases} \\ ۳. & \begin{cases} \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 \\ \sum M_C = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

که نقاط A ، B و C نقاط دلخواه روی جسم صلب می باشند و برای استفاده از معادله ی ۳ این نقاط نباید روی یک راستا باشند.

- برای به کارگیری این معادلات تعادل ابتدا باید پیکر آزاد جسم یا دیاگرام آزاد جسم را رسم نمود، پیکر آزاد جسم عبارت است از جسم و نیروهایی که به آن وارد می شود.
- اگر جسم صلب روی یکی از تکیه گاه های زیر قرار داشته باشد، نیروهای وارد بر آن از طرف تکیه گاه به جای تکیه گاه نوشته می شوند.

تنش

در SI واحد تنش نیوتن بر مترمربع $\frac{N}{m^2}$ یا پاسکال Pa می باشد

در سیستم انگلیسی واحد تنش بر حسب $\frac{lb}{in^2}$ پوند بر اینچ مربع تعریف شده است که با Psi نشان داده می شود و هر $1000 Psi$ ، $1 Ksi$ می باشد.

تنش عمودی :

تنش عمودی بر سطح را تنش عمودی نرمال یا محوری می نامند و با علامت σ (سیگما) نشان داده می شود.

تنش برشی :

تنش مماس بر سطح را تنش برشی می نامند و با حرف τ مشخص می کنند

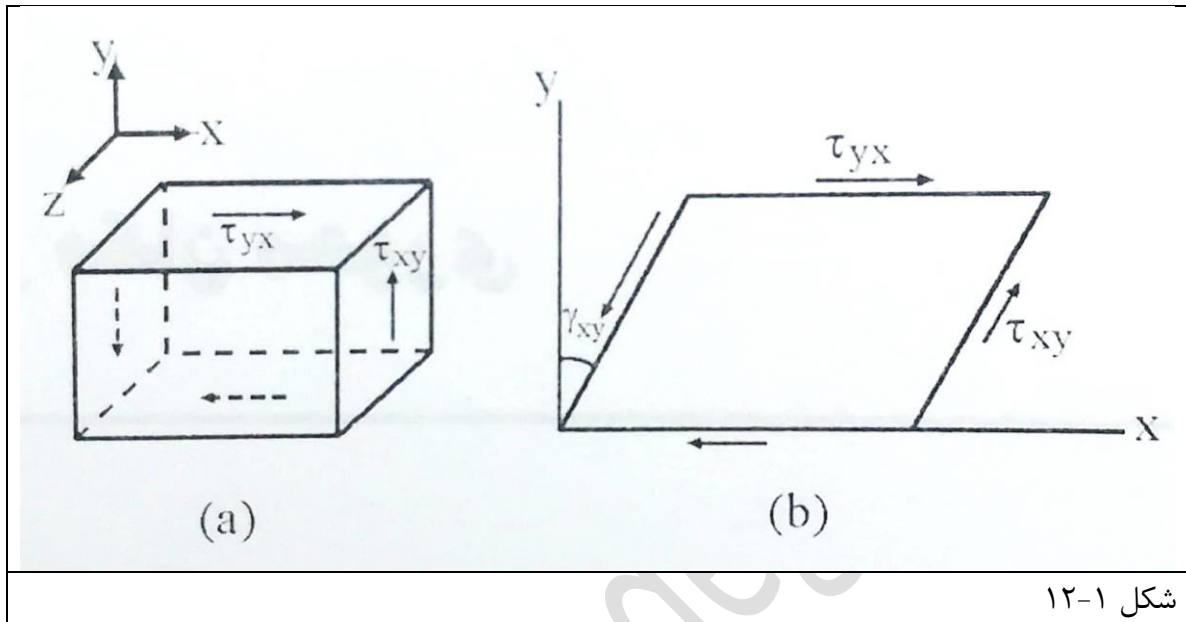
کرنش مهندسی: اگر فاصله دونقطه بر روی قطعه ای L_0 باشد و پس از بارگذاری این فاصله L شود کرنش مهندسی به شکل زیر تعریف می شود.

$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{\delta}{L_0}$$

وقتی که δ خیلی کوچک تر از L_0 باشد ($\delta \ll L_0$)

کرنش برشی

تغییر شکل المانی مکعب شکل که تحت تنش برشی واقع شده است به صورت شکل زیر در نظر بگیرید :



شکل ۱-۱۲

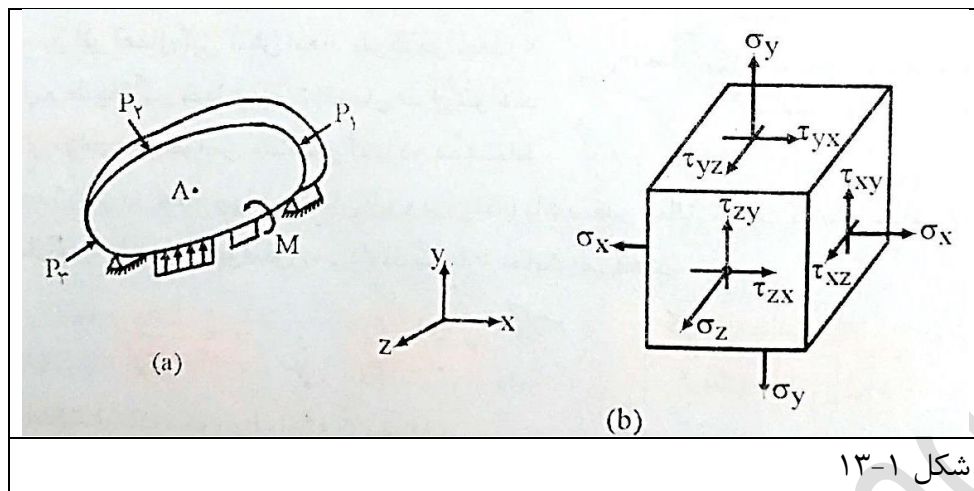
برای تغییر شکل‌های کوچک γ_{xy} کرنش برشی در صفحه $x-y$ تعریف می‌شود و با واحد رادیان سنجیده می‌شود.

در صفحات $x-z$ و $y-z$ به ترتیب کرنش‌های برشی را با γ_{xz} و γ_{yz} نشان می‌دهند.

تانسور تنش:

در شکل نشان داده شده، تنش‌های عمودی با $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ مشخص شده‌اند، در تنش برشی τ_{ij} ، اندیس i نشان محور عمود بر صفحه است و اندیس j جهت تنش در صفحه را معین می‌کند و داریم

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}$$

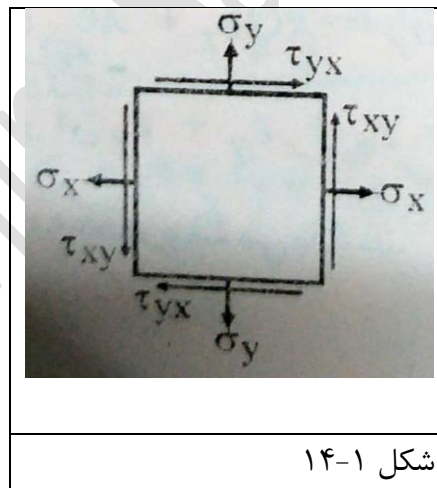


شکل ۱-۱۳

تنش‌های وارد بر یک المان را می‌توان به صورت ماتریس زیر نمایش داد که به آن تانسور تنش می‌گویند

$$[\sigma_{ij}] = \begin{matrix} \xrightarrow{\text{جهت نرمال}} \\ \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \downarrow \text{جهت تنش} \end{matrix}$$

در حالت دوبعدی در صفحه $x - y$ داریم:



شکل ۱-۱۴

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}, \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$$