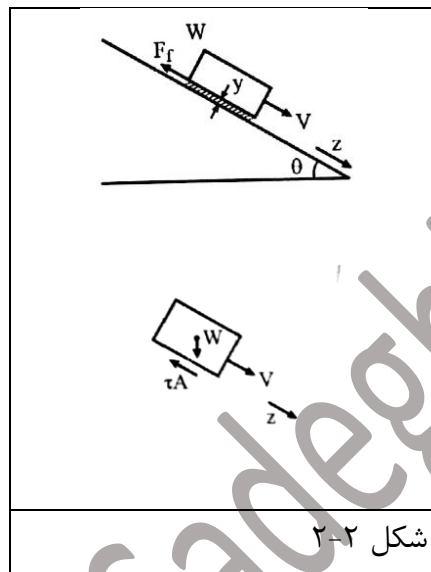


جلسه سوم

سطح شیبدار

جسمی به وزن را در نظر میگیریم که از روی سطح شیبداری که با افق زاویه θ می سازد به سمت پایین می لغزد بین این جسم و سطح شیبدار سیالی با لزجت و ضخامت و قرار دارد.



فرض میکنیم جسم به سرعت حد رسیده است یعنی سرعت حرکت به سمت پایین ثابت است. در نتیجه برآیند نیروهای وارد بر آن در جهت حرکت صفر است.

$$\Sigma F_z = 0 \rightarrow F_f - W \sin \theta = 0 \rightarrow F_f = W \sin \theta$$

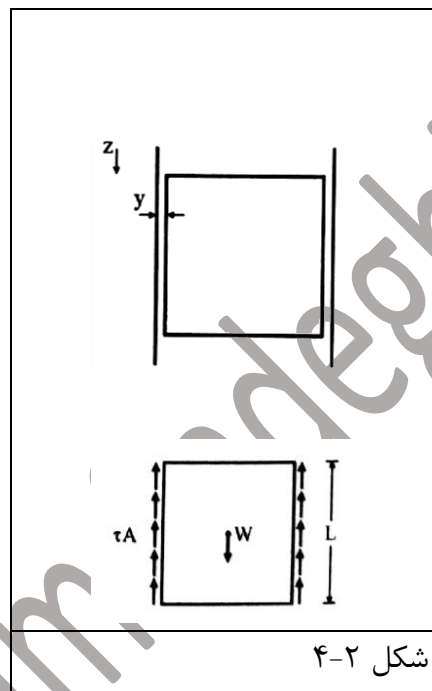
$$F_f = \tau A = \mu \frac{du}{dy} = \mu \frac{V}{y} A$$

$$\mu \frac{V}{y} A = W \sin \theta \rightarrow y = \frac{\mu V A}{W \sin \theta}$$

حرکت یک استوانه داخل استوانه دیگر

استوانه ای به قطر d و طول L را در نظر می گیریم که در داخل استوانه دیگری قرار گرفته و در اثر وزن خود با سرعت ثابت V در حال حرکت به سمت پایین است. بین دو استوانه سیالی با لزجت μ و ضخامت y پر شده است.

رابطه بین متغیرها را به دست می آوریم



شکل ۴-۲

چون استوانه ثابت است برآیند نیروهای وارد بر آن در جهت حرکت صفر است :

$$\Sigma F_z = 0 \rightarrow F_f - W = 0 \rightarrow F_f = W$$

اگر وزن استوانه داده نشده باشد میتوانیم آنرا با استفاده از رابطه $W = mg = \rho Vg$ به دست آوریم که

$$W = mg = \rho Vg = \rho \left(\frac{\pi d^2}{4} L \right) g$$

$$F_f = \tau A = \mu \frac{du}{dy} A = \mu \frac{V}{y} (\pi dL)$$

$$\rho \left(\frac{\pi d^2}{4} L \right) g = \mu \frac{V}{y} (\pi dL) \rightarrow V = \frac{\rho dgy}{4\mu}$$

اندازه گیری لزجت

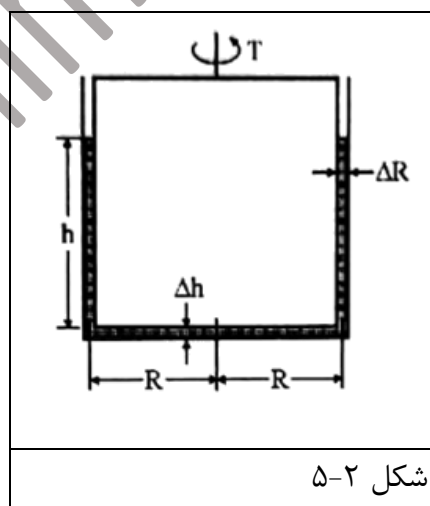
اندازه گیری لزجت توسط دستگاهی بنام لزجت سنج یا ویسکومتر صورت می گیرد

لزجت سنج ها عموماً در دو دسته چرخشی و لوله ای دسته بندی می شوند

دستگاه های چرخشی که در زیر چند نمونه از آن ها آورده شده بر مبنای اندازه گیری گشتاور

لازم جهت چرخش دستگاه عمل می کنند.

لزجت سنج استوانه ای



لزجت سنج استوانه ای از دو استوانه هم محور تشکیل شده است که فضای بین آنها از مایعی که لزجت آن

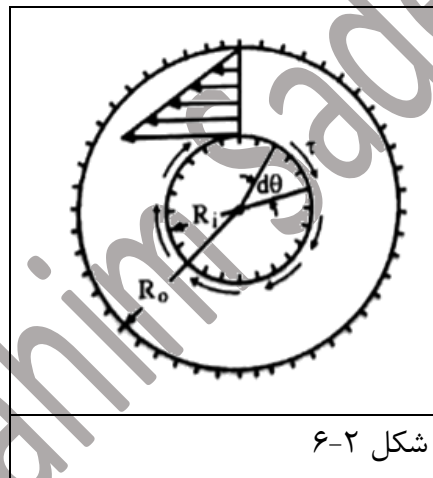
باید مشخص شود پر میشود. یکی از استوانه ها ساکن و دیگری چرخانده می شود. در نوع استور مر استوانه خارجی ساکن است و در نوع مایکل استوانه داخلی ساکن است با اندازه گیری گشتاور وارده و با تحلیل زیر میتوان لزجت مایع مورد نظر را تعیین کرد.

تعیین گشتاور حاصل از فضای بین دیواره های جانبی استوانه ها

$$T_1 = FR$$

$$F = \tau A = \mu \frac{VA}{\Delta R} = \mu \frac{R\omega}{\Delta R} (2\pi Rh) = 2\pi \frac{\mu R^2 \omega h}{\Delta R} \rightarrow T_1 = \frac{2\pi \mu R^3 \omega h}{\Delta R}$$

تعیین گشتاور حاصل از فضای بین کف استوانه ها

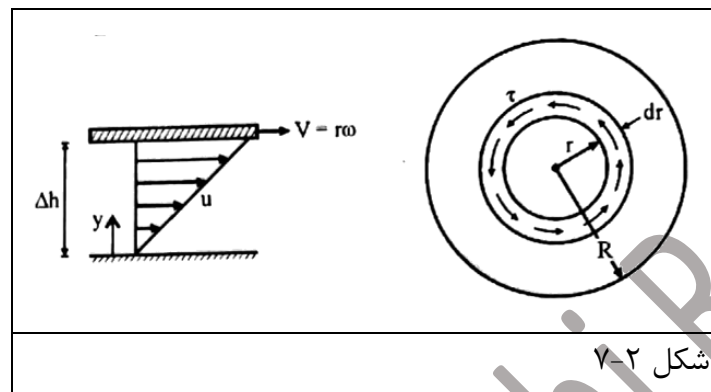


$$dT_2 = r dF$$

$$dF = \tau dA = \mu \frac{V}{\Delta h} (2\pi r dr) = 2\pi \left(\frac{\mu V r}{\Delta h} \right) dr \rightarrow dT_2 = 2\pi \left(\frac{\mu \omega r^3}{\Delta h} \right) dr$$

$$T_2 = 2\pi \left(\frac{\mu}{\Delta h} \right) \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi R^4 \mu \omega}{2\Delta h}$$

$$T = T_1 + T_2 = \frac{2\pi\mu R^3 \omega h}{\Delta R} + \frac{\pi R^4 \mu \omega}{2\Delta h}$$

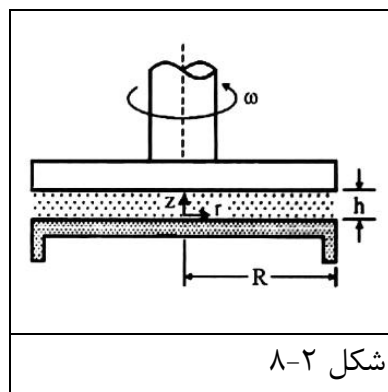


حالت های خاص

- اگر در مورد کف استوانه ها بحث به میان نیاید فقط گشتاور حاصل از دیواره های جانبی استوانه ها را در نظر میگیریم.

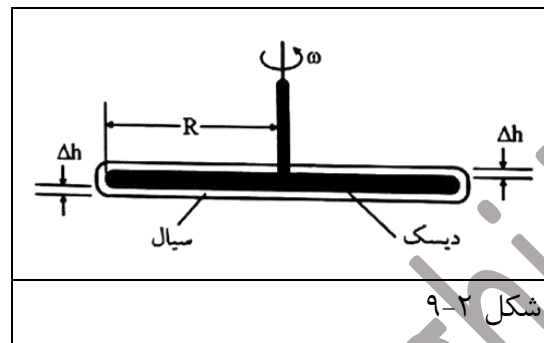
$$T = T_1 = \frac{2\pi\mu R^3 \omega h}{\Delta R}$$

- اگر به جای استوانه از دیسک استفاده شود.



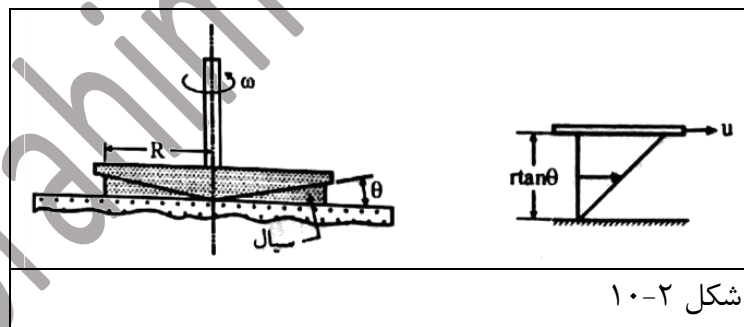
$$T = T_2 = \frac{\pi R^4 \mu \omega}{2 \Delta h}$$

- اگر فضای بالای دیسک بسته باشد.



$$T = 2T_2 = \frac{\pi R^4 \mu \omega}{\Delta h}$$

لزجت سنج مخروطی - صفحه ای



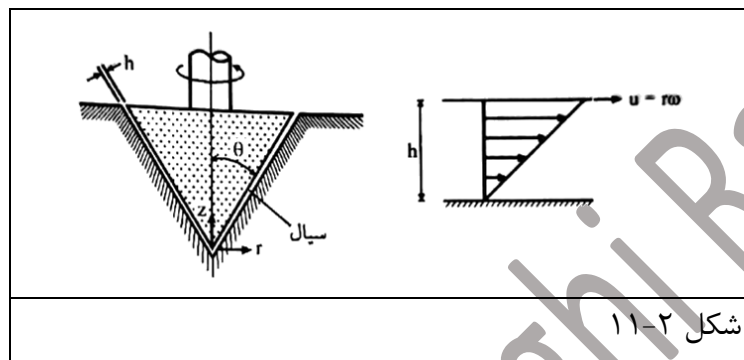
$$dT = r dF$$

$$dF = \tau dA = \mu \frac{r \omega}{r \tan \theta} \left(\frac{2\pi r dr}{\cos \theta} \right) = \frac{2\pi \omega \mu r}{\sin \theta} \rightarrow dT = \frac{2\pi \omega \mu}{\sin \theta} r^2 dr$$

$$T = \frac{2\pi \omega \mu}{\sin \theta} \int_0^R r^2 dr = \frac{2\pi \omega \mu R^3}{3 \sin \theta}$$

$$\text{for } \theta \ll \rightarrow \sin \theta \simeq \theta \rightarrow T = \frac{2\pi\omega\mu R^3}{3\theta}$$

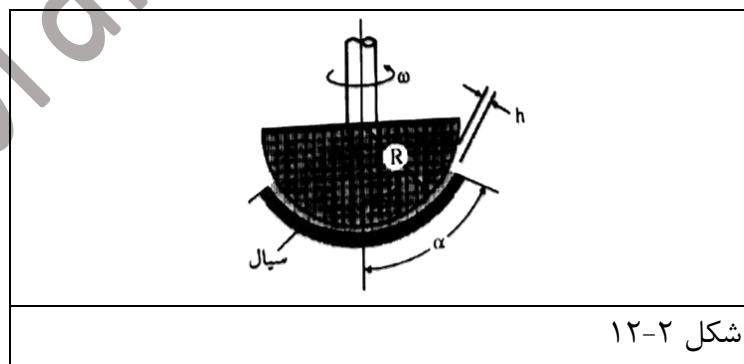
لزجت سنج مخروطی



$$dF = \mu \frac{r\omega}{h} (2\pi r \frac{dr}{\sin \theta}) = \frac{2\pi r^2 \mu \omega}{h \sin \theta} dr \rightarrow dT = \frac{2\pi r^3 \mu \omega}{h \sin \theta} dr$$

$$T = \frac{2\pi\mu\omega}{h \sin \theta} \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi\mu\omega R^4}{2h \sin \theta}$$

لزجت سنج کروی



$$dT = r dF, r = R \sin \theta, u = \omega r = \omega R \sin \theta$$

$$dF = \mu \frac{R \omega \sin \theta}{h} (2\pi r R d\theta) = \mu \frac{R \omega \sin \theta}{h} (2\pi R^2 \sin \theta d\theta)$$

$$dT = R \sin \theta * \mu \frac{R \omega \sin \theta}{h} (2\pi R^2 \sin \theta d\theta) = \frac{2\pi \mu \omega R^4}{h} \sin^3 \theta d\theta$$

$$T = \frac{2\pi \mu \omega R^4}{h} \int_0^\alpha \sin^3 \theta d\theta = \frac{2\pi \mu \omega R^4}{h} \left[\frac{\cos^3 \alpha}{3} - \cos \alpha + \frac{2}{3} \right]$$

$$\text{for } \alpha = 180^\circ \rightarrow T = \frac{8\pi \mu \omega R^4}{3h}$$

مثال: یک دستگاه ویسکومتر از دو استوانه هم مرکز به طول 30cm و قطرهای 20cm و 20.2cm ساخته شده است. برای چرخاندن استوانه داخلی با سرعت 400 دور بر دقیقه rpm باید گشتاوری معادل 0.13N.m به آن اعمال کرد. ویسکوزیته موجود بین دو استوانه چقدر است؟

$$T = \frac{2\pi \mu R^3 \omega h}{\Delta R} \rightarrow \mu = \frac{T \Delta R}{2\pi R^3 \omega h}$$

$$\Delta R = 10.1 - 10 = 0.1\text{cm}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{60} * 400 = 41.9\text{rad/sec}$$

$$\mu = \frac{0.13 * 0.1 * 10^{-2}}{2\pi * 0.1^3 * 0.3 * 41.9} = 0.00165\text{Pa.sec}$$