

جلسه هفتم

روش انتگرال گیری

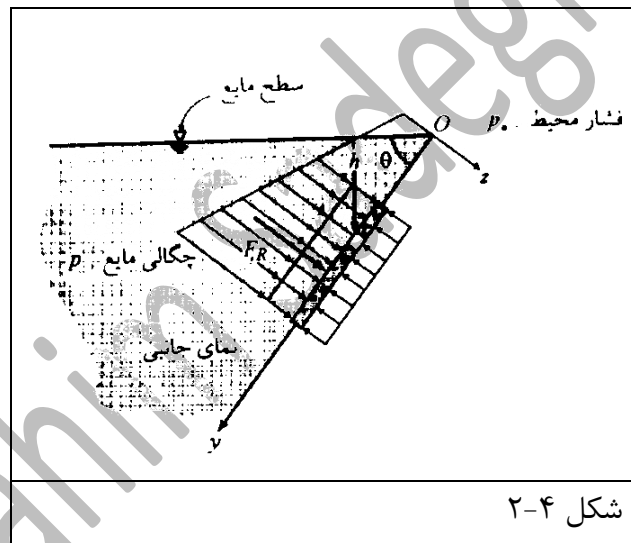
با توجه به اینکه سیال ساکن است تنش برشی وجود ندارد و نیروی هیدروستاتیکی وارد بر هر جزء سطح در امتداد عمود بر آن اثر میکند. نیروی فشاری وارد بر جزء سطح از طرف سیال عبارتست از:

$$dF = PdA$$

با جمع زدن نیروهای جزئی نیروی برآیند وارد بر کل سطح محاسبه می شود:

$$F = \int_A PdA$$

توزیع فشار روی صفحه ذکر شده در شکل زیر نشان داده شده است.



توجه داشته باشید که در اینجا توزیعی از نیروهای فشاری را داریم اما برآیند آنها را با یک تک نیرو به نام نیروی برآیند بیان کردیم. برای تعیین نقطه اثر برآیند از معادلات زیر استفاده میکنیم:

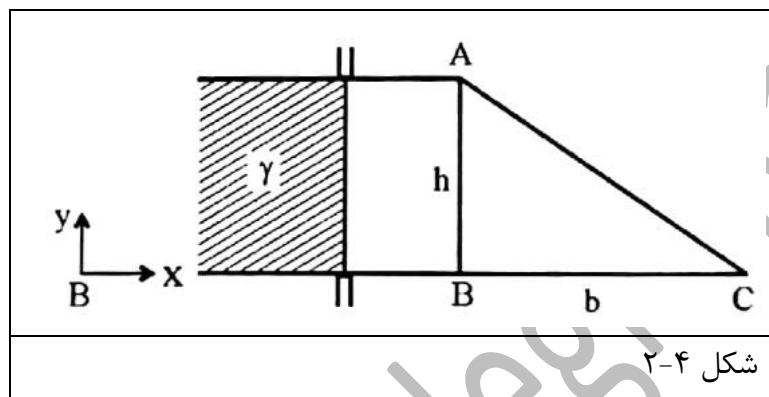
$$x_p = \frac{1}{F} \int_A x \rho dA$$

$$y_p = \frac{1}{F} \int_A y \rho dA$$

مثال (یک سطح قائم به شکل مثلث قائم الزاویه موجود است که رأس آن در سطح آزاد یک مایع قرار گرفته است.

الف) نیروی وارد بر یک طرف سطح را محاسبه کنید

ب) مرکز فشار سطح مثلثی را به دست آورید.



الف)

$$dA = x dy$$

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{h} \rightarrow x = \frac{b}{h} y \rightarrow dA = \frac{b}{h} y dy$$

$$F = \int_A P dA = \int_0^h (\gamma y) \frac{b}{h} y dy = \gamma \frac{b}{h} \int_0^h y^2 dy = \gamma \frac{b}{h} \left[\frac{y^3}{3} \right] = \frac{\gamma b h^2}{3}$$

ب)

$$x_p = \frac{1}{F} \int_A x \rho dA = \frac{\int_A x \rho dA}{\int_A P dA} \stackrel{\left(x = \frac{b}{h} y\right)}{=} \frac{\gamma \frac{b}{h} \int_0^h \frac{b}{h} y * y^2 dy}{\frac{\gamma b h^2}{3}} = \frac{\gamma \frac{b^2}{h^2} \int_0^h y^3 dy}{\frac{\gamma b h^2}{3}} =$$

$$\frac{\gamma \frac{b^2}{h^2} \left[\frac{y^4}{4} \right]_0^h}{\frac{\gamma b h^2}{3}} = \frac{\gamma \frac{b^2}{h^2} \frac{h^4}{4}}{\frac{\gamma b h^2}{3}} = \frac{3}{8} b$$

$$y_p = \frac{1}{F} \int_A y \rho dA = \frac{\int_A y \rho dA}{\int_A P dA} = \frac{\gamma \frac{b}{h} \int_0^h y^3 dy}{\frac{\gamma b h^2}{3}} = \frac{\gamma \frac{b}{h} \left[\frac{y^4}{4} \right]_0^h}{\frac{\gamma b h^2}{3}} = \frac{\gamma \frac{b}{h} \frac{h^4}{4}}{\frac{\gamma b h^2}{3}} = \frac{3}{4} h$$

۲-۲-۳ - استفاده از روابط

برای محاسبه نیروی هیدروستاتیک وارد بر یک سطح تخت که داخل یک سیال پیوسته غوطه ور است از رابطه زیر استفاده میکنیم

$$F = P_c A$$

$$F = \gamma \bar{h} A$$

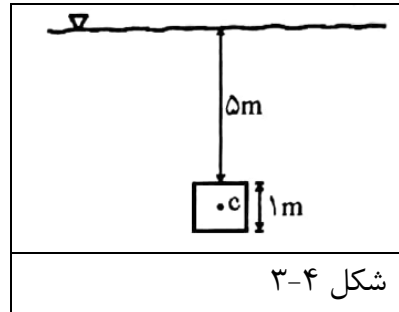
بنابراین این نیرو عبارت است از حاصلضرب فشار وارد بر مرکز سطح صفحه در مساحت آن با توجه به شکل داریم:

$$\bar{h} = \bar{y} \sin \theta$$

- نیروی ذکر شده به صورت عمود بر صفحه وارد می شود

$\bar{h}$ مقدار فاصله قایم مرکز سطح صفحه تا سطح آزاد آب را نشان می دهد.

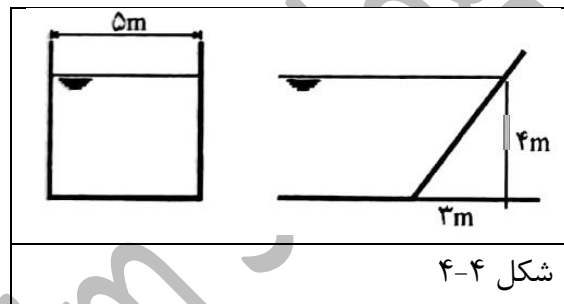
مثال: یک صفحه جامد مربع شکل به ضلع $1m$ به صورت عمودی در زیر آب قرار گرفته به طوری که ضلع بالایی آن $5m$ زیر آب قرار دارد. نیروی وارد بر یک طرف این صفحه چقدر است؟ (γ وزن مخصوص آب)



شکل ۳-۴

$$F = \gamma \bar{h} A = \gamma * \left(5 + \frac{1}{2} \right) (1^2) = 5.5\gamma$$

مثال (در شکل مقابل دو نمای یک مخزن محتوی آب $\gamma = 10KN / m^2$ ترسیم شده است. کل نیروی هیدروستاتیک وارد بر دیواره شیبدار مخزن بر حسب KN چقدر است؟



شکل ۴-۴

$$L = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5m, \bar{h} = \frac{4}{2} = 2m, A = 5 * 5 = 25m^2$$

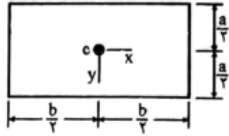
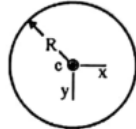
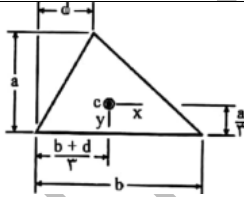
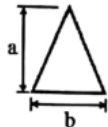
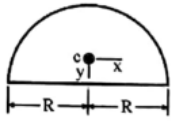
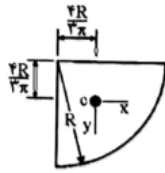
$$F = \gamma \bar{h} A = 1020 * 25 = 500KN$$

با استفاده از معادلات ذکر شده در روش انتگرالگیری برای سطوح ساده تر به روابط زیر می‌رسیم:

$$x_p = \bar{x} + \frac{\bar{I}_{xy}}{yA}$$

$$y_p = \bar{y} + \frac{\bar{I}_G}{xA}$$

در معادلات فوق $\bar{I}_{xy}$ حاصلضرب اینرسی و $\bar{I}_G$ گشتاور دوم سطح است.

شکل	A	$\overline{I}_{xy}$	I_G
مستطیل		ab	$\frac{ba^3}{12}$
دایره		πR^2	$\frac{\pi R^4}{4}$
مثلث (کلی)		$\frac{ab}{2}$	$\frac{1}{72}ba^2(b-2d)$
مثلث متساوی الساقین		$\frac{ab}{2}$	$\frac{ba^3}{36}$
نیم دایره		$\frac{\pi R^2}{2}$	$0.10976R^2$
ربع دایره		$\frac{\pi R^2}{4}$	$-0.01647R^2$
شکل ۴-۵			

توجه: در حل مسایلی که سطح در تماس با فشار اتمسفر است از فشار نسبی استفاده میکنیم چون اگر فشار اتمسفر را هم در نظر بگیریم همان فشار بر روی طرف دیگر سطح عمل میکند و دو نیرو برابر و در خلاف جهت هم هستند و همدیگر را خنثی میکنند. بنابراین فشار اتمسفر نقشی در نیروی برآیند ایفا نمی کند. در غیر این صورت مجبوریم از فشار مطلق استفاده کنیم.