

استاتیک

جلسه اول

فصل اول:

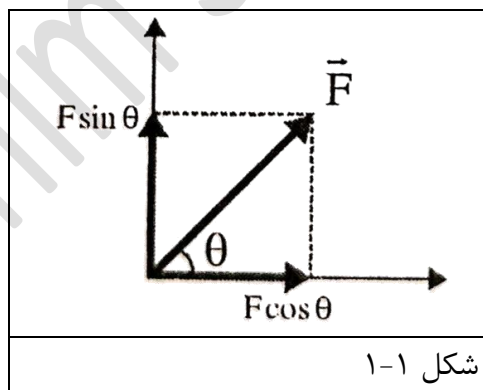
استاتیک: شاخه ای از علم مکانیک می باشد که به بررسی تعادل اجسام صلب ساکن یا با حرکت یکنواخت تحت اثر نیروهای وارد بر آن می پردازد

نیرو: اثر یک جسم به جسم دیگر نیرو نامیده می شود. نیرو یک کمیت برداری می باشد. مشخصه نیرو عبارت است از اندازه جهت و نقطه اثر آن کلیه عملیات مربوط به بردار ها برای نیروها نیز صادق می باشد.

واحد نیرو: واحد نیرو در سیستم بین المللی SI نیوتن N و در سیستم مرسوم آمریکایی $USCU$ پوند lb می باشد. هر ۱۰۰۰ نیوتن را با کیلو نیوتن KN و هر هزار پوند را با Kip نمایش می دهند.

تصویر نیرو بر روی محور: برای به دست آوردن تصویر نیرو (مولفه نیرو) بر روی یک محور، مقدار نیرو را در کسینوس زاویه بین نیرو و محور ضرب می کنیم.

نمایش نیرو: نیرو را مانند بردار با یک پاره خط جهت دار (پیکان) نمایش می دهند. در مختصات کارتزین (x, y) نیرو را می توان به وسیله مولفه هایش در جهات x و y به صورت زیر نشان داد:



$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} = (F \cos \theta) \vec{i} + (F \sin \theta) \vec{j}$$

که در آن F اندازه نیرو و $\vec{i}$ و $\vec{j}$ بردارهای واحد در جهات x و y هستند.

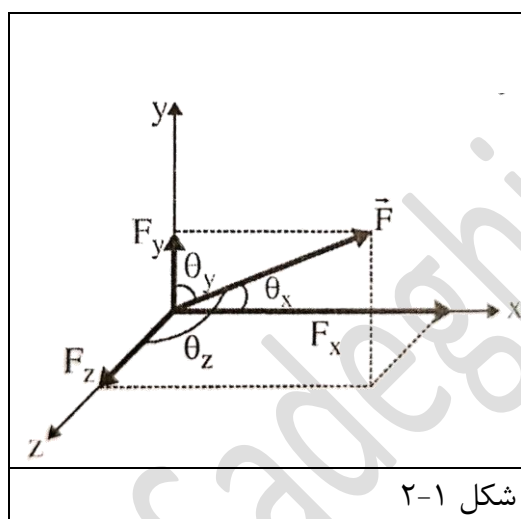
در حالت فضایی (سه بعدی) نیروی F را می توان به صورت های زیر نمایش داد:

الف) اگر زاویه نیرو با سه محور x ، y و z معلوم باشد: در صورتی که زاویه سه نیرو با محورهای x ، y و z به ترتیب θ_x ، θ_y و θ_z باشند تصویر نیروی F بر سه محور عبارت است از:

$$F_x = F \cos \theta_x, F_y = F \cos \theta_y, F_z = F \cos \theta_z$$

بنابراین:

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} = (F \cos \theta_x) \vec{i} + (F \cos \theta_y) \vec{j} + (F \cos \theta_z) \vec{k}$$



که در آن $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بردار واحد در جهت محورهای x ، y و z می باشند رابطه زیر بین θ_x ، θ_y و θ_z برقرار می باشد.

$$\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1$$

ب) اگر مختصات دو نقطه در راستای نیرو معلوم می باشد: در صورتی که مختصات دو نقطه دلخواه $A(x_A, y_A, z_A)$ و $B(x_B, y_B, z_B)$ که در راستای نیرو قرار دارند معلوم باشد با فرض:

$$\Delta x = x_B - x_A, \Delta y = y_B - y_A, \Delta z = z_B - z_A$$

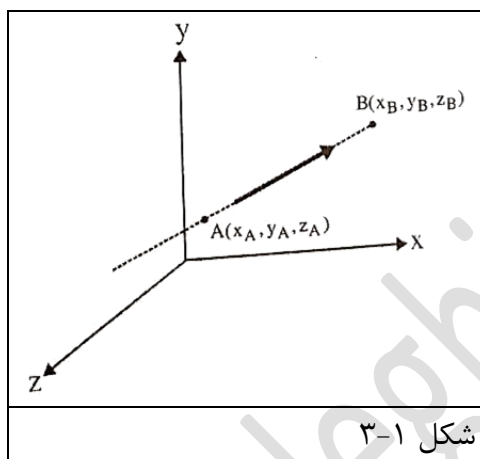
$$\Delta = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

$$F_x = \frac{\Delta x}{\Delta}, F_y = \frac{\Delta y}{\Delta}, F_z = \frac{\Delta z}{\Delta}$$

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} = \left(\frac{\Delta x}{\Delta} F\right) \vec{i} + \left(\frac{\Delta y}{\Delta} F\right) \vec{j} + \left(\frac{\Delta z}{\Delta} F\right) \vec{k}$$

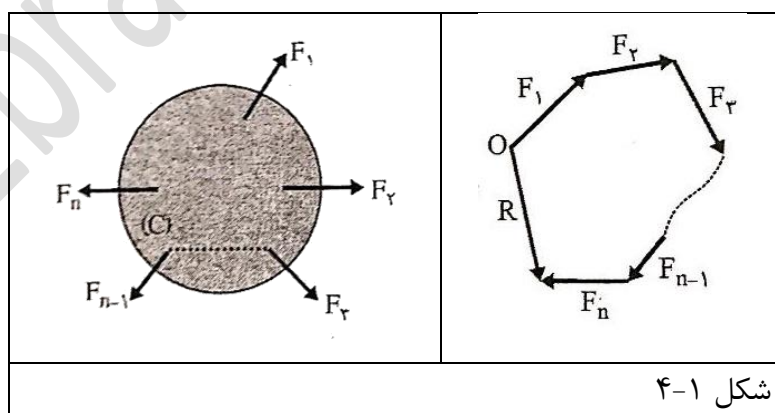
توجه داشته باشیم که در آن:

$$\frac{\Delta x}{\Delta} = \cos \theta_x, \frac{\Delta y}{\Delta} = \cos \theta_y, \frac{\Delta z}{\Delta} = \cos \theta_z$$

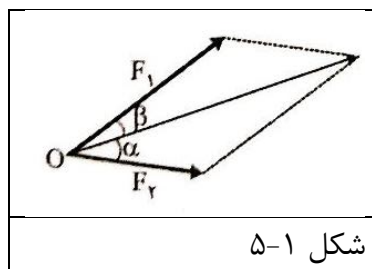


برآیند نیروها در حالت دو بعدی: برآیند (مجموع) چند نیرو را می توان به روش ترسیمی یا تحلیلی بدست آورد.

الف) روش ترسیمی: برای به دست آوردن برآیند نیروهای $F_1, F_2, \dots, F_n$ که بر جسم وارد می شوند، ابتدا از نقطه O نیروی موازی و مساوی F_1 رسم می کنیم. از انتهای نیروی F_1 نیرویی موازی و مساوی F_2 را رسم می کنیم. به همین ترتیب تا نیروی n ام ادامه می دهیم. برآیند n نیرو، از اتصال ابتدای نیروی F_1 به انتهای نیرو F_n به دست می آید (R) .



در حالت خاص، برآیند دو نیرو که با یکدیگر زاویه θ می سازند با استفاده از قانون کسینوس ها در مثلث برابر است با:



$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + F_1 F_2 \cos \theta, (\theta = \alpha + \beta)$$

زاویه بین نیروها با نیروی برآیند را می توان با استفاده از قانون سینوس ها در مثلث به دست آورد.

$$\frac{R}{\sin \theta} = \frac{F_1}{\sin \alpha} = \frac{F_2}{\sin \beta}$$

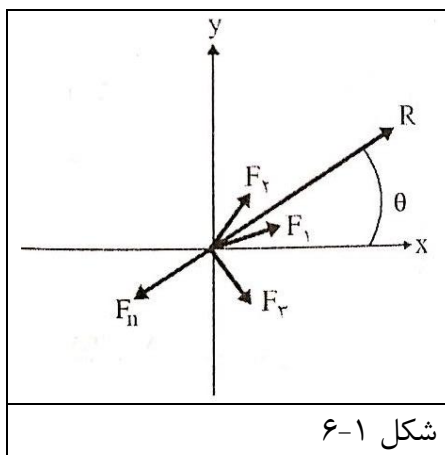
ب) روش تحلیلی: در این روش ابتدا نیروهایی که به جسم وارد می شوند را در دستگاه مختصات $(x - y)$ نمایش می دهیم در این حالت برآیند نیروهای $F_1, F_2, \dots$ و F_n برابر است با:

$$R = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2}, \tan \theta = \frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x}$$

که در آن R اندازه برآیند نیروها، ΣF_x مجموع مولفه های (تصاویر) نیروها روی محور x ، ΣF_y مجموع مولفه های (تصاویر) نیروها روی محور y و θ زاویه برآیند نیروها با محور x می باشد.

بنابراین بردار برآیند نیروها در حالت دو بعدی را می توان به صورت زیر نشان داد:

$$\vec{R} = (\Sigma F_x) \vec{i} + (\Sigma F_y) \vec{j}$$



برآیند نیروها در حالت سه بعدی: برای به دست آوردن برآیند نیروها در حالت سه بعدی ابتدا نیروهای F_1 ، F_2 ، ... و F_n را به صورت برداری نشان می‌دهیم. در این حالت برآیند نیروها برابر است با:

$$R = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2 + (\Sigma F_z)^2}$$

$$\frac{\Sigma F_x}{R} = \cos \theta_x, \frac{\Sigma F_y}{R} = \cos \theta_y, \frac{\Sigma F_z}{R} = \cos \theta_z$$

که در آن R اندازه برآیند نیروها و ΣF_x ، ΣF_y و ΣF_z به ترتیب برابر است با مجموع مولفه های (تصاویر) نیروها در جهات x ، y و z و θ_x ، θ_y و θ_z به ترتیب زاویه برآیند نیروها با محورهای می باشد. بنابراین بردار برآیند نیروها را می توان به صورت زیر نشان داد:

$$\vec{R} = (\Sigma F_x) \vec{i} + (\Sigma F_y) \vec{j} + (\Sigma F_z) \vec{k}$$

برای مثال برآیند دو نیروی $\vec{F}_1 = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$ و $\vec{F}_2 = 4\vec{i} - 6\vec{j} + 9\vec{k}$ برابر است

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 6\vec{i} - 9\vec{j} + 14\vec{k}$$

حاصلضرب داخلی یا عددی دو بردار: حاصل ضرب داخلی دو بردار برابر است با حاصلضرب اندازه دو بردار در کسینوس زاویه بین دو بردار. حاصل ضرب داخلی دو بردار یک کمیت اسکالر (عددی) می باشد. بنابراین حاصل ضرب داخلی دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ که به صورت $\vec{A} \cdot \vec{B}$ نشان داده میشود برابر است با:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta$$

که در آن $|\vec{A}|$ و $|\vec{B}|$ به ترتیب اندازه دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و θ زاویه بین دو بردار می باشد.

در صورتی که دو بردار توسط مولفه های شان نشان داده شده باشد حاصل ضرب دو بردار برابر است با مجموع حاصلضرب و مولفه های نظیر دو بردار.

برای مثال اگر دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ توسط مولفه های شان به صورت $\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$ و $\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$ نشان داده شده باشند، همانطور که ملاحظه می شود مولفه های نظیر A_x ، A_y و A_z به ترتیب برابر با B_x ، B_y و B_z خواهد بود. بنابراین حاصل ضرب داخلی دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ برابر است:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

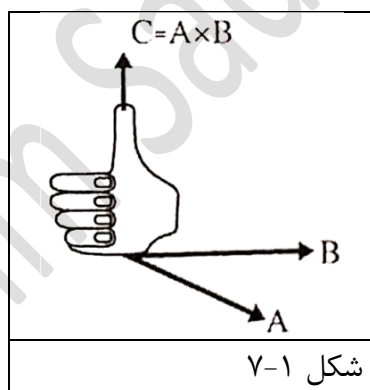
با توجه به روابط بالا کسینوس زاویه بین دو بردار برابر است با:

$$\cos \theta = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{|\vec{A}| |\vec{B}|}$$

$|\vec{A}|$ و $|\vec{B}|$ اندازه بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ که برابر با مقادیر زیر می باشد:

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}, |\vec{B}| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$$

حاصل ضرب خارجی (بردار) دو بردار: حاصل ضرب خارجی دو بردار یک کمیت برداری است که اندازه آن برابر با حاصل ضرب اندازه دو بردار در سینوس زاویه بین دو بردار. راستای آن عمود بر صفحه دو بردار است و جهت آن از قانون دست راست مطابق شکل تعیین می گردد.



در صورتی که اندازه حاصل ضرب دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ برابر $\vec{C}$ باشد مقدار برابر است با:

$$\vec{C} = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta$$

که در آن $|\vec{A}|$ و $|\vec{B}|$ اندازه دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و θ زاویه بین دو بردار می باشد.

در صورتی که دو بردار به وسیله مولفه های شان نمایش داده شده باشند، مانند $\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$ و $\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$ در این حالت بردار حاصل ضرب خارجی آنها از بسط دترمینان زیر حاصل می گردد.

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \det \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{C} = (A_y B_z - A_z B_y) \vec{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \vec{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \vec{k}$$