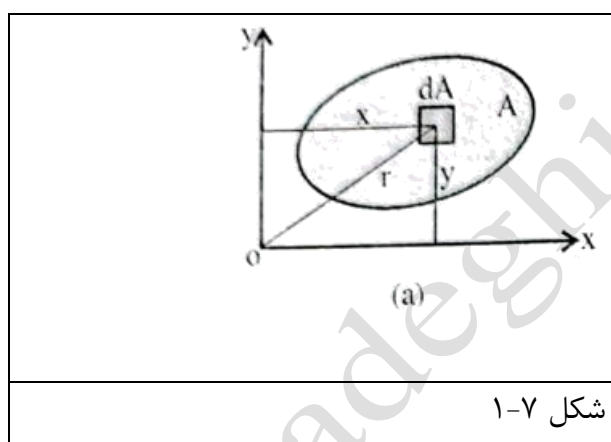


قسمت یازدهم

فصل هفتم: گشتاور یا ممان اینرسی

ممان اینرسی

ممان اینرسی یا لختی دورانی، مقاومتی است که اجسام در هنگام شروع به حرکت دایره‌ای یا توقف از حرکت دایره‌ای از خود به نمایش می‌گذارند. اجسام، همواره تمایل دارند وضعیت فعلی خود را حفظ کنند و هنگام تغییر وضعیت (از حالت سکون به حرکت یا حرکت به سکون)، مقاومت مشخصی را از خود به نمایش می‌گذارند. این مقاومت که به جرم جسم بستگی دارد، با عنوان اینرسی شناخته می‌شود. اگر تغییر وضعیت، در حرکت دورانی و شتاب زاویه‌ای مد نظر باشد، به مقاومت مذکور، ممان اینرسی/لختی دورانی می‌گویند.



سطح نشان داده شده در شکل را به مساحت A در صفحه x, y در نظر بگیریم گشتاور ماند المان کوچک به مساحت dA نسبت به محور ها طبق تعریف برابر است با:

$$dI_x = y^2 dA$$

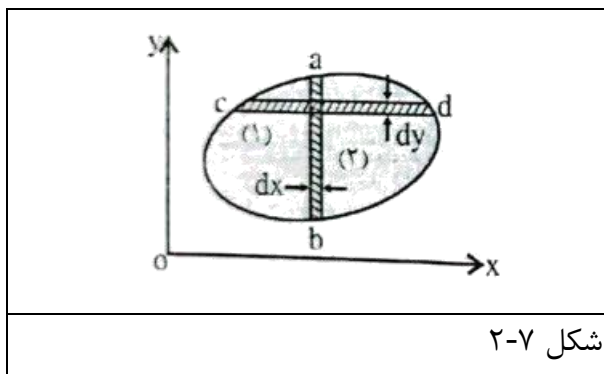
$$dI_y = x^2 dA$$

بنابراین ممان اینرسی سطح نسبت به محور های x, y برابر است با مجموع dI_x, dI_y یا به عبارت دیگر انتگرال آنها روی سطح A :

$$I_x = \int_A y^2 dA$$

$$I_y = \int_A x^2 dA$$

I_x, I_y به ترتیب ممان اینرسی یا گشتاور دوم سطح حول محور x, y نامیده می‌شود



در شکل المان به صورت مستطیل I_x, I_y انتخاب شده است $dA = dxdy$. می توان از المان نواری

مطابق شکل نیز استفاده نمود در این حالت برای المان قائم $dA = \overline{ab} \cdot dx$ و برای المان قائم

$dA = \overline{cd} \cdot dx$ که $\overline{ab}, \overline{cd}$ را می توان با معلوم بودن معادله منحنی هایی که سطح را تشکیل می دهند بر حسب y, x به دست آورد.

در صورت استفاده از المان نواری و روابط بالا برای به دست آوردن ممان سطح نسبت به یک محور المان نواری باید موازی با محور انتخاب شود.

به عنوان مثال در شکل برای به دست آوردن ممان اینرسی سطح حول محور x از المان cd که موازی محور است استفاده می کنیم در غیر این صورت نمی توان مستقیماً از معادلات بالا استفاده کرد.

حاصل ضرب اینرسی

سطح نشان داده شده در شکل را در نظر بگیرید حاصل ضرب اینرسی المان dA طبق تعریف برابر است با

$$dI_{xy} = xy dA$$

بنابراین حاصل ضرب اینرسی کل سطح نسبت به محور های x, y برابر است با:

$$I_{xy} = \int_A xy dA$$

گشتاور یا ممان اینرسی قطبی

در شکل ممان اینرسی قطبی المان dA نسبت به نقطه O در حقیقت نسبت به محور عمود بر صفحه $x-y$ برابر است با $dJ_o = r^2 dA$ بنابراین ممان اینرسی قطبی کل سطح نسبت به نقطه O برابر است با:

$$J_o = \int_A r^2 dA$$

با توجه به این نکته که: $r^2 = x^2 + y^2$ داریم:

$$J_o = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA$$

از آنجایی که:

$$I_x = \int_A y^2 dA$$

$$I_y = \int_A x^2 dA$$

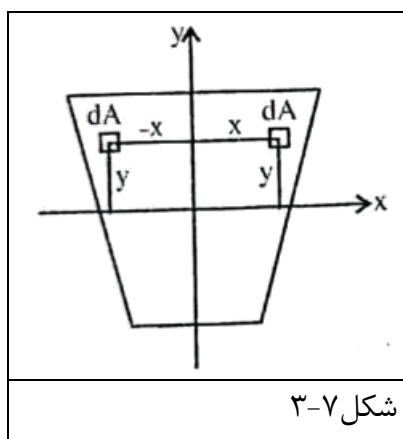
داریم:

$$J_o = I_x + I_y$$

در صورتی که محور عمود بر صفحه را در O, Z بنامیم در واقع J_o همان I_z ممان اینرسی سطح A حول محور Z می باشد یعنی:

$$J_o = I_z$$

اگر سطحی دارای حداقل یک محور تقارن باشد حاصل ضرب اینرسی نسبت به محور تقارن و هر محور عمود بر آن برابر صفر است



شکل ۷-۳

در شکل محور y محور تقارن و محور x محور دلخواه عمود بر محور تقارن است. برای هر المان dA به مختصات x, y المان قرینه به مختصات $-x, y$ وجود دارد. مجموع حاصلضرب اینرسی این دو المان برابر صفر می باشد:

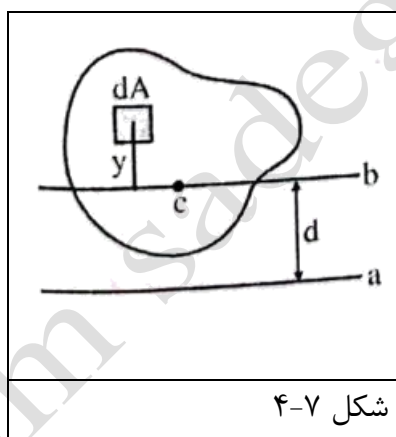
$$(x \times y dA) + (-x \times y dA) = 0$$

با توجه به اینکه برای هر المان یک المان قرینه نیز وجود دارد بنابراین حاصل ضرب اینرسی کل سطح برابر با صفر می باشد:

$$I_{xy} = 0$$

قضیه محوره‌های موازی

رابطه ساده‌ای بین ممان اینرسی یک مقطع نسبت به دو محور موازی وجود دارد به شرطی که یکی از محورها از مرکز سطح عبور کند:



در شکل محور b از نقطه C مرکز مقطع نشان داده شده می گذرد. ممان اینرسی مقطع نسبت به محور a که به فاصله d از محور b قرار دارد مطابق تعریف ممان اینرسی مقطع نسبت به محور a برابر است با:

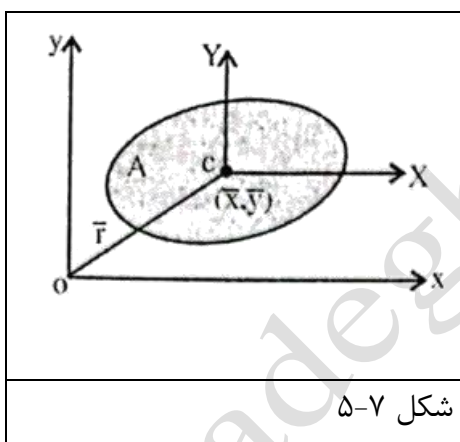
$$I_a = \int (y + d)^2 dA = \int y^2 dA + \int 2yd \cdot dA + \int d^2 \cdot dA = \int y^2 dA + 2d \int y \cdot dA + d^2 \int dA$$

در عبارت بالا $I_b = \int y^2 dA$ برابر ممان اینرسی مقطع نسبت به محور b می باشد $\int y dA$ گشتاور اول

سطح است که برابر با صفر است $(y dA = \bar{y} A = 0 \times A = 0)$ و $\int dA = A$ بنابراین

$$I_a = \bar{I}_b + Ad^2$$

در رابطه بالا $\bar{I}_b$ ممان اینرسی مقطع نسبت به محور b که از مرکز سطح مقطع میگذرد می باشد. I_a ممان اینرسی مقطع نسبت به محور a و A مساحت مقطع می باشد. d فاصله دو محور a, b موازی است به طور کلی مقطع نشان داده شده در شکل را در نظر بگیرید محورهای متعامد Y, X از نقطه C مرکز سطح مقطع به مختصات $(\bar{X}, \bar{Y})$ می گذرد در صورتیکه ممان اینرسی مقطع حول محورهای Y, X را با $\bar{I}_Y, \bar{I}_X$ حاصلضرب اینرسی نسبت به محورهای Y, X با $\bar{I}_{YX}$ و ممان اینرسی قطبی حول C را با $\bar{J}_C$ نشان دهیم داریم:



شکل ۵-۷

$$I_x = \bar{I}_X + A\bar{y}^2$$

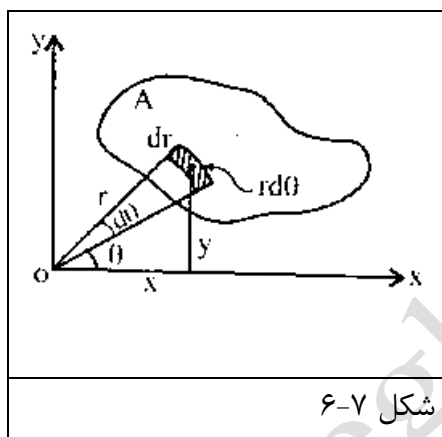
$$I_y = \bar{I}_Y + A\bar{x}^2$$

$$I_{xy} = \bar{I}_{XY} + \bar{x}\bar{y}A$$

$$J_o = J_c + A\bar{r}^2$$

ممان اینرسی و حاصلضرب اینرسی در مختصات قطبی

در مقطع نشان داده شده در مختصات (r, θ) المان dA را به فاصله r از مبدا در نظر بگیریم مساحت این المان برابر $dA = dr(rd\theta)$ و فاصله آن تا محور y برابر $x = r \cos \theta$ و تا محور x برابر $y = r \sin \theta$ می باشد



ممان اینرسی مقطع حول محور x و y و حاصل ضرب اینرسی نسبت به محور (x, y) مطابق تعریف برابر است با

$$I_x = \int_A y^2 dA = \iint (r \sin \theta)^2 r dr d\theta$$

$$I_y = \int_A x^2 dA = \iint (r \cos \theta)^2 r dr d\theta$$

$$I_{xy} = \int_A xy dA = \iint (r \sin \theta)(r \cos \theta) r dr d\theta$$

پس از ساده سازی داریم:

$$I_x = \iint r^3 \cos^2 \theta dr d\theta$$

$$I_y = \iint r^3 \sin^2 \theta dr d\theta$$

$$I_{xy} = \iint \frac{1}{2} r^2 \sin 2\theta dr d\theta$$

$$J_o = \int_A r^2 dA = \iint r^2 (r dr d\theta) = \iint r^3 dr d\theta$$

شعاع ژیراسیون

شعاع ژیراسیون در علم فیزیک و علوم مهندسی مورد استفاده قرار می گیرد در صورت معلوم بودن ممان اینرسی و مساحت سطح مقطع شعاع ژیراسیون به صورت زیر تعریف می گردد

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

$$r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

$$r_o = \sqrt{\frac{J_o}{A}}$$

که در آن r_x, r_y شعاع ژیراسیون حول محورهای x, y و r_o شعاع ژیراسیون قطبی می باشند

