جلسه هفتم

تماس میان دو استوانه با محور های موازی

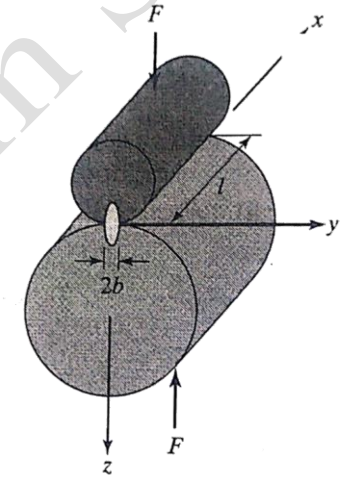
بازی هرگاه دو استوانه با محور های موازی روی هم فشار داده شوند سطح تماس میان آنها مطابق شکل به شکل یک مستطیل خواهد بود. عرض این مستطیل را با $2b$ و طول آن را با l نشان داده ایم. تنش‌ها در روی این جای پای مستطیلی به شکل بیضوی پخش می‌شود به گونه‌ای که تنش قائم ماکسیموم در امتداد خط مرکز مستطیل وارد می‌شود نصف عرض مستطیل که با ب b نشان داده می شود از رابطه زیر به دست می آید:

$$b=\sqrt{\frac{2F}{\pi l}C_E K_D}$$

که در آن:

$$C_E=\frac{1-\mu_1^2}{E_1}+\frac{1-\mu_2^2}{E_2} \quad \text{و} \quad K_D=\frac{d_1 d_2}{d_1-d_2}$$

در رابطه با لا l نشانگر طول استوانه هاست.



شکل ۱-۱۸: ناحیه تماس دو استوانه

همانگونه که قبلاً گفتیم اگر تقعر هرکدام از استوانه ها تغییر کند علامت جمله d مربوط به استوانه باید عوض شود اگر یکی از سطوح مسطح باشد خواهیم داشت $\frac{1}{d}=0$ تنش قائم ماکسیمم عبارت خواهد بود از:

$$\sigma_{z0} = \frac{-2F}{\pi bl}$$

این تنش در سطح تماس میان دو استوانه و در امتداد خط وسط مستطیل تماس وارد میشود از این تنش ماکسیم می‌توان در قضیه حداکثر تنش قائم گسیختگی استفاده کرد یادآور می‌شویم که از این قضیه برای مطمئن شدن از مقاومت قطعه طراحی شده و عدم تخریب آن در حین کار استفاده می شود از آنجا که حالت تنش میان دو استوانه از نوع سه محوری است مولفه‌های تنش قائم دیگری در. تماس و در امتداد های x, y وارد خواهد شد اگر طراح بخواهد از قضیه گسیختگی دیگری استفاده کند لازم است این مولفه های تنشی را بداند استخراج معادلات این تنش ها از حوزه این درس خارج است برای طراحانی که علاقمند به کاربرد قضیه حداکثر تنش برش گسیختگی هستند لازم است یادآور شویم که حداکثر تنش برشی ناشی از تماس این دو استوانه در محل تقریبی به فاصله 0.8هشت دهم در زیر سطح تماس اثر می کند در این محل حداکثر تنش برشی به صورت تقریبی از رابطه زیر به دست می آید:

$$\tau_{\max} \simeq \frac{1}{3}\sigma_{z0}$$

مطابق گزارش های رورک $(Rorek)$ تغییر شکل دو استوانه ای که دارای محورهای موازی و مواد یکسان هستند از رابطه زیر به دست می آید:

$$\delta = \frac{2F(1-\mu^2)}{l\pi E}\left(\frac{2}{3} + \ln\frac{d_1}{b} + \ln\frac{d_2}{b}\right)$$

از آنجا که مقدار b بستگی به نیروی وارد شده F دارد این رابطه غیر خطی است.

تماس میان دو استوانه با محور های متعامد

هرگاه دو استوانه مطابق شکل طوری با هم تماس پیدا کنند که محور یکی بر دیگری قائم باشد سطح تماس میان آنها به شکل بیضی خواهد بود نیم قطر بزرگ این بیضی را با c نیم قطر کوچک آن را با d نشان داده‌ایم این دو نیم قطر مطابق فرمول های یانگ و به شکل زیر محاسبه می شود:

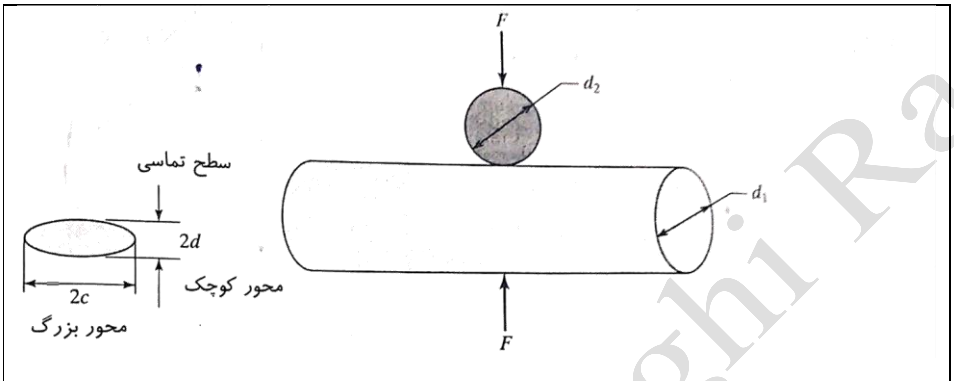
$$c = \alpha\sqrt[3]{FK_D C_E}$$

$$d = \beta\sqrt[3]{FK_D C_E}$$

که در آن:

$$C_E = \frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2}$$

$$K_D = \frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2}$$



شکل ۱-۱۹: ناحیه تماس دو استوانه متعامد

مقادیر α و β بستگی به نسبت $\frac{d_1}{d_2}$ دارد و از جدول زیر به دست می آید

d_1/d_2	1	1.5	2	3	4	6	10
α	0.908	1.045	1.158	1.350	1.515	1.767	2.175
β	0.908	0.799	0.734	0.651	0.602	0.544	0.481
λ	0.825	0.818	0.804	0.774	0.747	0.702	0.641

شکل ۱-۲۰: مقادیر α و β

برای این حالت بارگذاری حداکثر تنش قائم در سطح تماس از رابطه زیر به دست می آید:

$$\sigma_{z0} = \frac{-1.5F}{\pi c d}$$

حداکثر تنش برشی نیز به صورت زیر خواهد شد:

$$\tau_{\max} \simeq \frac{1}{3}\sigma_{z0}$$

مطابق گزارشات رورک مقدار تغییر شکل از رابطه زیر به دست می آید

$$\delta = \lambda \sqrt[3]{\frac{F^2 C_E^2}{K_D}}$$

مثال

یک جفت ساچمه از جنس فولاد کربن و به قطر $5cm$ در تماس با یکدیگر قرار دارد و با نیروی $F = 10N$ روی یکدیگر فشار داده می شود. حداکثر تنش قائم و حداکثر تنش برشی وارد بر این ساچمه های فولادی را به دست آورید $(\mu = 0.3, E = 2.07 \times 10^{11}\, pa)$.

حل:

ابتدا مقادیر زیر را محاسبه می نماییم

$$C_E = \frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2} = 2\left(\frac{1-\mu^2}{E}\right) = 2\left(\frac{1-(0.3)^2}{2.07\times 10^{11}\, pa}\right) = 8.7923\times 10^{-12}$$

$$K_D = \frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2} = \frac{d^2}{2d} = \frac{d}{2} = \frac{0.05m}{2} = 0.025m$$

سپس مقدار a را محاسبه می نماییم

$$a = \sqrt[3]{\frac{3FC_E K_D}{8}} = \sqrt[3]{\frac{3(10)(8.7923\times 10^{-12})0.025m}{8}} = 9.38\times 10^{-5} m$$

با جایگذاری ذر رابطه تنش داریم:

$$\sigma_{z0} = \frac{-3F}{2\pi a^2} = \frac{-3\times 10N}{2\pi \times (9.38\times 10^{-5} m)^2} = -5.4\times 10^8\, Pa$$

$$\tau_{\max} \simeq \frac{\sigma_{z0}}{3} = \frac{-5.4\times 10^8}{3} = -1.8\times 10^8\, Pa$$