

جلسه هفتم

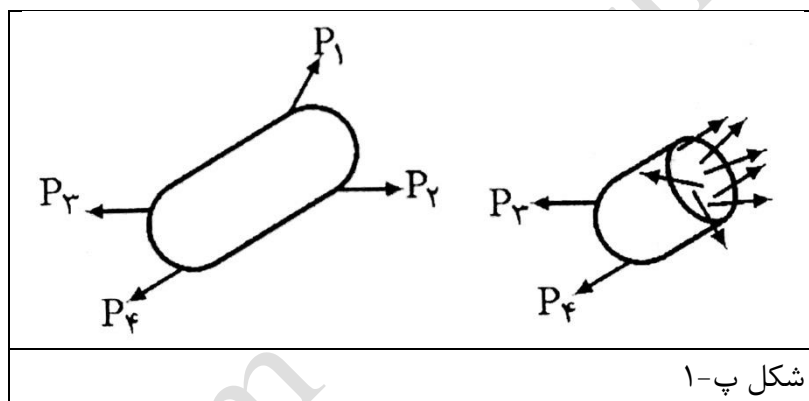
پیوست

خلاصه ای از مقاومت مصالح:

مقاومت مصالح شاخه‌ای از علوم مهندسی می‌باشد که به بررسی رفتار اجسام جامد در مقابل بارگذاری‌های مختلف می‌پردازد این رفتار عمدتاً شامل تغییر شکل‌ها و عکس‌العمل‌های داخلی اجسام می‌باشد

تنش:

شدت نیروهای عکس‌العمل داخل جسم جامد به واحد سطح تنش نامیده می‌شود. به عبارت دیگر اگر جسمی تحت نیروهای خارجی قرار گیرد عکس‌العمل هر مقطع از جسم در مقابل نیروهای خارجی به صورت بار گسترده‌ای به روی سطح مقطع می‌باشد شدت این بار به واحد سطح در هر نقطه از سطح مقطع را تنش در آن نقطه از مقطع می‌باشد.



واحد تنش:

در SI واحد تنش نیوتن بر مترمربع $\frac{N}{m^2}$ یا پاسکال Pa می‌باشد

در سیستم انگلیسی واحد تنش بر حسب $\frac{lb}{in^2}$ پوند بر اینچ مربع تعریف شده است که با Psi نشان داده می‌شود و هر $1 Ksi$ ، $1000 Psi$ می‌باشد.

تنش عمودی:

تنش عمودی بر سطح را تنش عمودی نرمال یا محوری می‌نامند و با علامت σ (سیگما) نشان داده می‌شود.

تنش برشی :

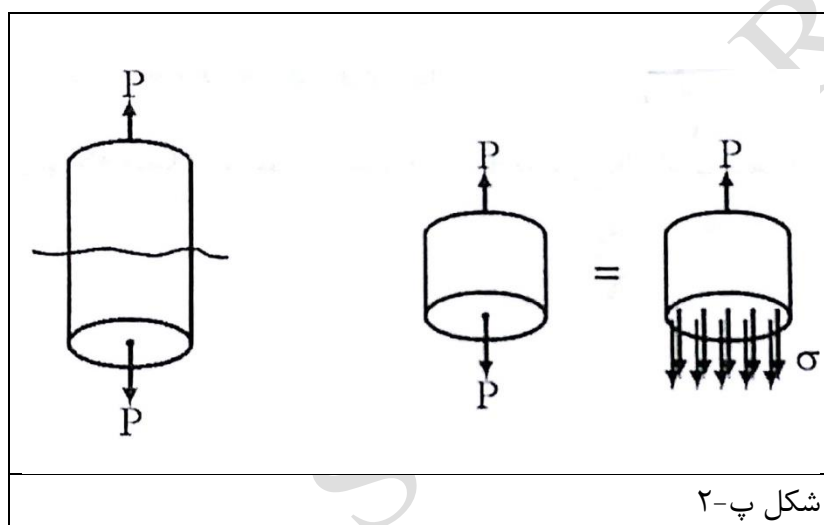
تنش مماس بر سطح را تنش برشی می نامند و با حرف τ مشخص می کنند

نیروی محوری :

برآینه نیروهای عمود بر سطح در یک مقطع نیروی محوری نامیده می شوند.

نکته : شرط لازم برای توزیع یکنواخت تنش محوری در مقطع ای از جنس واحد که تحت نیروی محوری P

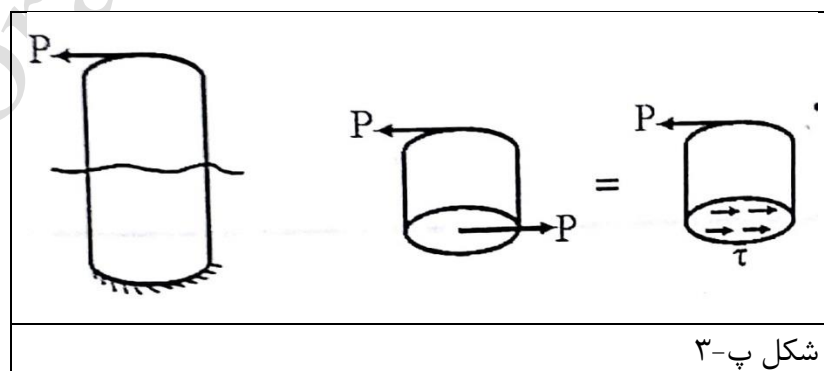
واحد شده است این است که نیرو از مرکز سطح مقطع عبور کند در این حالت تنش برابر است با $\sigma = \frac{P}{A}$



تنش برشی متوسط (میانگین) : اگر مقطعی به مساحت A تحت نیروی برشی P واقع شود تنش برشی

$$\tau = \frac{P}{A}$$

متوسط برابر است با :



کرنش و تغییر مکان

کرنش مهندسی:

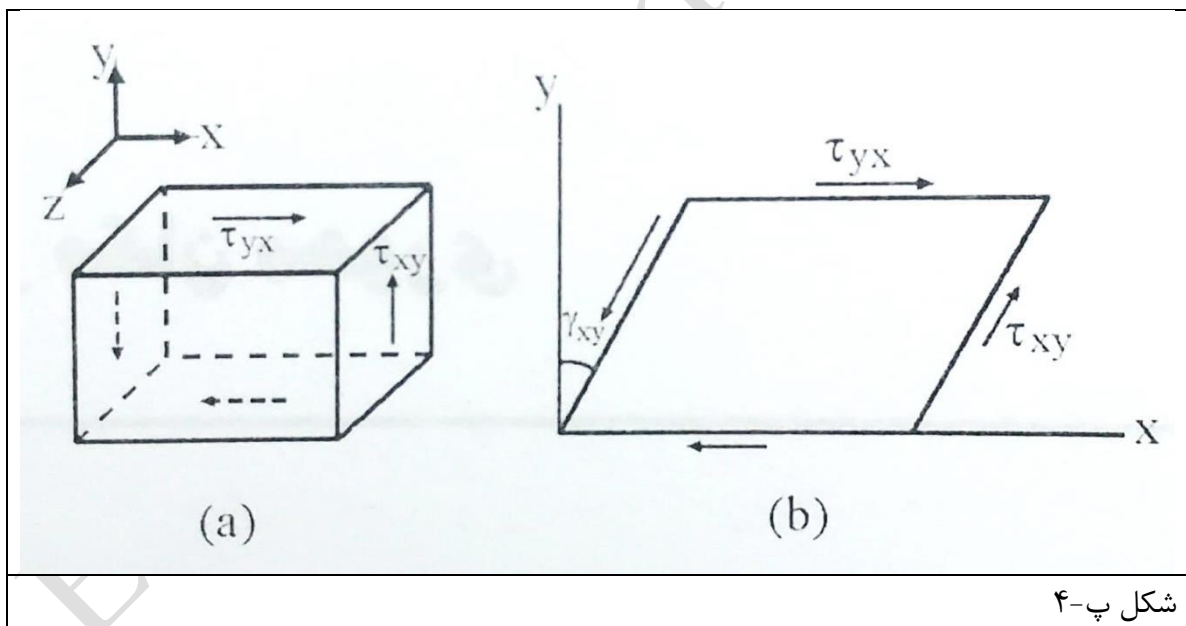
اگر فاصله دونقطه بر روی قطعه‌ای L_0 باشد و پس از بارگذاری این فاصله L شود کرنش مهندسی به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{\delta}{L_0}$$

وقتی که δ خیلی کوچک‌تر از L_0 باشد ($\delta \ll L_0$)

کرنش برشی:

تغییر شکل المانی مکعب شکل که تحت تنش برشی واقع شده است به صورت شکل زیر در نظر بگیرید :



برای تغییر شکل‌های کوچک γ_{xy} کرنش برشی در صفحه $X-Y$ تعریف می‌شود و با واحد رادیان سنجیده می‌شود.

در صفحات $X-Z$ و $Y-Z$ به ترتیب کرنش‌های برشی را با γ_{xz} و γ_{yz} نشان می‌دهند.

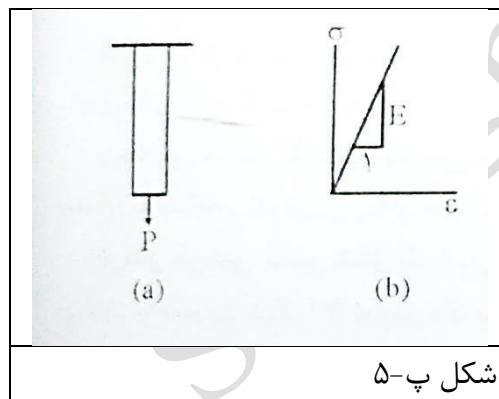
کرنش حرارتی:

اگر فاصله دونقطه از جسم L باشد با اعمال تغییر دما ΔT طول جسم به اندازه $\delta = \alpha L \Delta T$ تغییر خواهد کرد که در آن α ضریب انبساط حرارتی می باشد پس داریم:

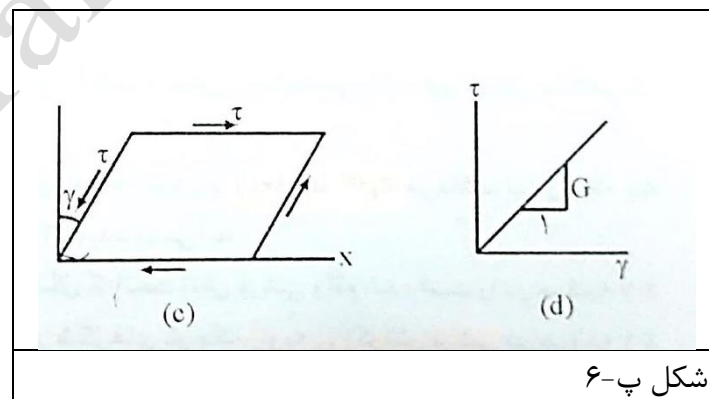
$$\varepsilon_T = \frac{\delta}{L} = \frac{\alpha L \Delta T}{L} \rightarrow \varepsilon_T = \alpha \Delta T$$

قانون هوک:

در تغییر مکان های کوچک رابطه تنش و کرنش اکثر مواد خطی می باشد و به صورت $\sigma = E \varepsilon$ تعریف می گردد یعنی تنش با ضریب E که مدول الاستیسیته نامیده می شود با کرنش متناسب است.

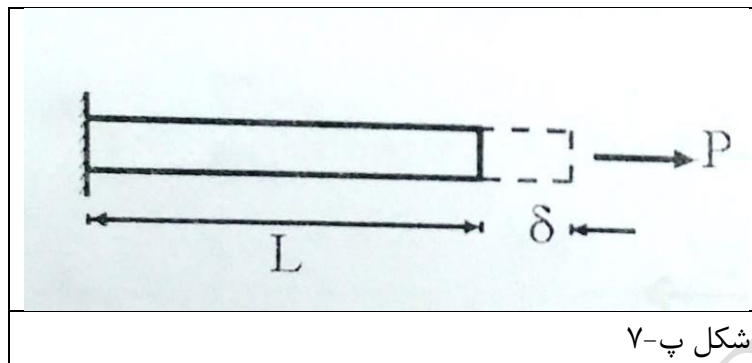


همچنین اگر المانی تحت کرنش قرار گیرد رابطه ی بین تنش برشی با کرنش برشی به صورت $\tau = G \gamma$ می باشد که در آن G مدول برشی است.



تغییر مکان محوری:

میله‌ای با سطح A که تحت بار P قرار دارد در نظر بگیرید داریم:



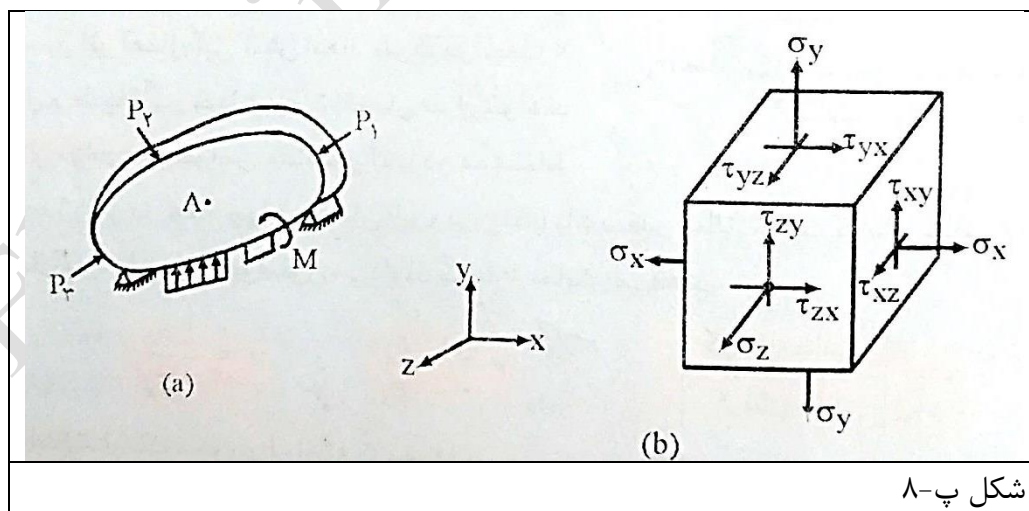
شکل پ-۷

$$\sigma = E \varepsilon \rightarrow \frac{P}{A} = E \frac{\delta}{L} \rightarrow \delta = \frac{PL}{AE} = \frac{\sigma L}{E}$$

تانسور تنش:

در شکل نشان داده شده، تنش‌های عمودی با $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ مشخص شده‌اند، در تنش برشی τ_{ij} ، اندیس i نشان محور عمود بر صفحه است و اندیس j جهت تنش در صفحه را معین می‌کند و داریم

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}$$



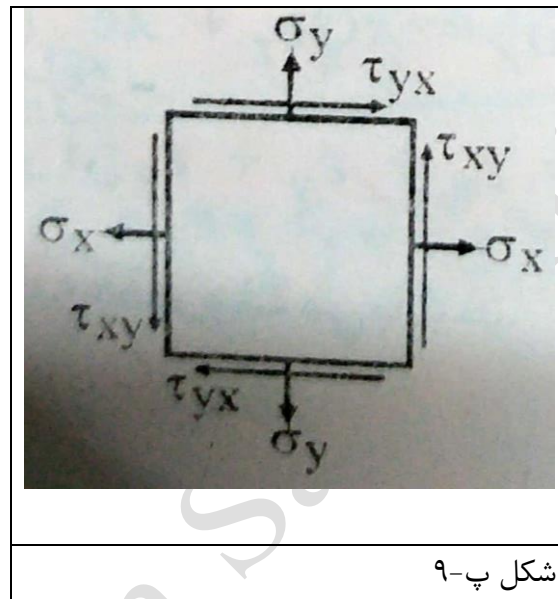
شکل پ-۸

تنش‌های وارد بر یک المان را می‌توان به صورت ماتریس زیر نمایش داد که به آن تانسور تنش می‌گویند

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

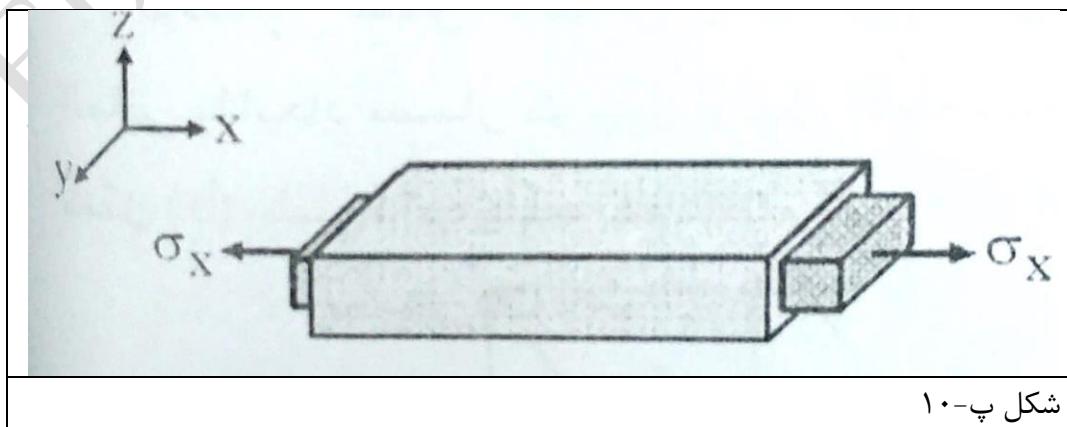
جهت نرمال →
جهت تنش ↓

در حالت دوبعدی در صفحه $x - y$ داریم:



$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}, \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$$

ضریب پواسون (ν):



$$\nu = \left| \frac{korneshe - janebi}{korneshe - tooli} \right|, \nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \rightarrow \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$$

پیچش

پیچش در اجسام هنگامی رخ می‌دهد که تحت اثر گشتاور در امتداد محورشان قرار داشته باشند در اثر پیچش تنش و تغییر شکل در اجسام به وجود می‌آید که بستگی به شکل مقطع دارد و تنش آن از نوع برشی است.

پیچش مقاطع دایروی:

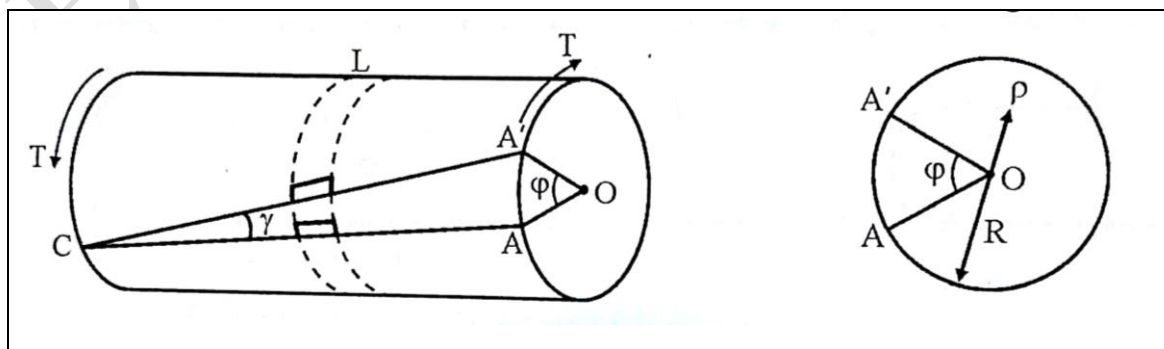
با در نظر گرفتن فرضیات زیر:

۱- مقاطع دایروی عمود بر محور میله پس از اعمال پیچش مسطح و عمود بر محور میله باقی می‌ماند.

۲- کرنش برشی از محور مرکزی میله به‌طور خطی تغییر می‌کند.

۳- برای حالت الاستیک رابطه‌ی تنش و کرنش از قانون هوک پیروی کند.

شکل زیر را در نظر بگیرید که در اثر اعمال گشتاور پیچشی T به میله، نقطه‌ی A و A' تغییر مکان پیدا می‌کند و مقطع به‌اندازه‌ی ϕ دوران می‌کند.



شکل پ-۱۱

برای گشتاور T تنش برشی در مقطع ایجاد می‌شود. که مقدار آن در هر نقطه به فاصله‌ی آن از مرکز دایره، گشتاور پیچشی و ممان قطبی وابسته است. پس برای نقطه D داریم:

$$\tau = \frac{T \rho}{J}$$

که مقدار J برای دایره برابر است با:

$$J = \frac{1}{2} \pi R^4 = \frac{1}{32} \pi D^4$$

می‌باشد و برای مقطع سوراخ‌دار با شعاع داخلی R_1 و شعاع خارجی R_2 مقدار J برابر است با:

$$J = \frac{1}{2} \pi (R_2^4 - R_1^4) = \frac{1}{32} \pi (D_2^4 - D_1^4)$$

بیشترین مقدار تنش برش روی محیط دایره اتفاق می‌افتد و داریم $R = \rho$ بنابراین:

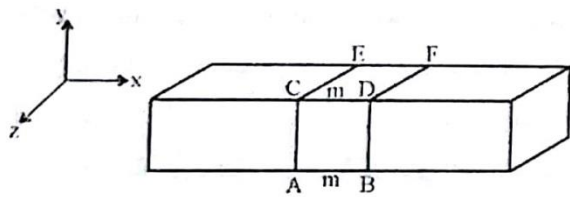
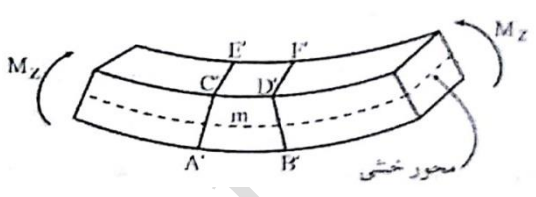
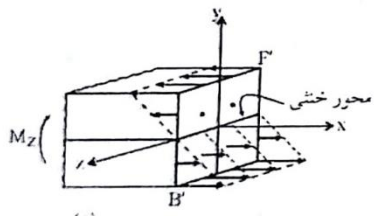
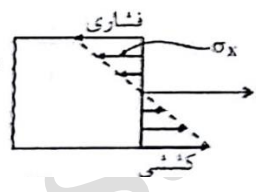
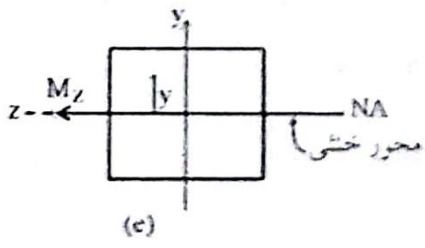
$$\tau_{\max} = \frac{TR}{J} = \frac{2T}{\pi R^3} = \frac{16T}{\pi D^3}$$

تنش خمشی

تیری مانند شکل ۴-۱-الف در نظر بگیرید که تحت گشتاور خمشی M واقع شده است. پس از اعمال خمش

M تیر به شکل (ب) درخواهد آمد. همان‌طور که واضح است پس از اعمال گشتاور M طول CD کاهش

میابد و طول AB افزایش پیدا می کند. بنابراین تنش در قسمت بالایی تیر فشاری و در قسمت پایینی آن کششی می باشد. با توجه به این نکته می توان نتیجه گرفت که در هر مقطع تیر نقاطی وجود دارند که تنش در آن ها صفر است. خطی که این نقاط را به هم متصل می سازد محور خنثی نامیده می شود. و از مرکز سطح عبور می کند.

		
شکل الف	شکل ب	
		 (c)
شکل ج	شکل د	شکل ه
شکل پ-۱۲		

تنش به وجود آمده در اثر اعمال گشتاور تنش خمشی نامیده می شود و از نوع تنش محوری می باشد.

برای فرموله کردن تنش خمشی فرضیات زیر را در نظر بگیرید.

۱- مقاطع عمود به محور تیر بعد از اعمال خمش همچنان بدون تغییر و عمود به محور تیر باقی می ماند.

۲- برای حالت الاستیک رابطه ی بین تنش و کرنش از قانون هوک پیروی می کند.

۳- مدول الاستیسیته در کلیه ی تارهای تیر ثابت و مقدار آن در کشش و فشار یکسان است.

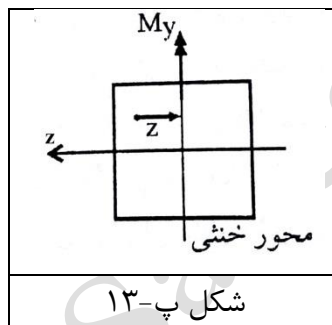
با در نظر گرفتن فرضیات بالا برای هر نقطه به فاصله‌ی y از تار خنثی تنش خمشی از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$\sigma_x = \frac{M_z y}{I_z}$$

که در آن σ_x تنش محوری عمود بر مقطع در راستای X است و M_z و I_z به ترتیب گشتاور خمشی و ممان اینرسی مقطع حول محور Z می‌باشد.

در صورتی که گشتاور خمشی حول محور Y به مقطع وارد شود تنش خمشی برابر است با:

$$\sigma_x = \frac{M_y z}{I_y}$$



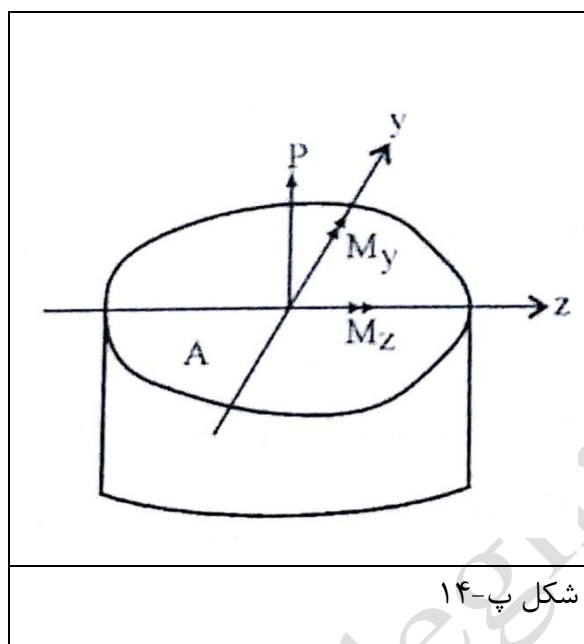
بر اساس روابط فوق تنش ماکزیمم در نقاطی رخ می‌دهد که بیشترین فاصله از تار خنثی را داشته باشند. اگر فاصله‌ی این نقاط را با c نشان دهیم مقاومت خمشی مقطع که با S نشان داده می‌شود به شکل زیر محاسبه می‌شود.

$$S = \frac{I}{c}$$

خمش توأم با نیروی محوری:

مقطع را مطابق شکل نظر بگیرید که تحت گشتاورهای M_y و M_z و نیروی محوری P قرار دارد. در این حالت تنش در نقطه‌ی دلخواه A روی سطح مقطع و به فاصله‌ی Z و Y از محورهای مختصات به شکل زیر می‌باشد.

$$\sigma_A = \pm \frac{M_z y}{I_z} \pm \frac{M_y z}{I_y} \pm \frac{P}{A}$$



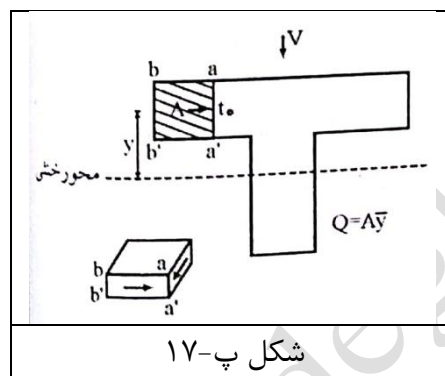
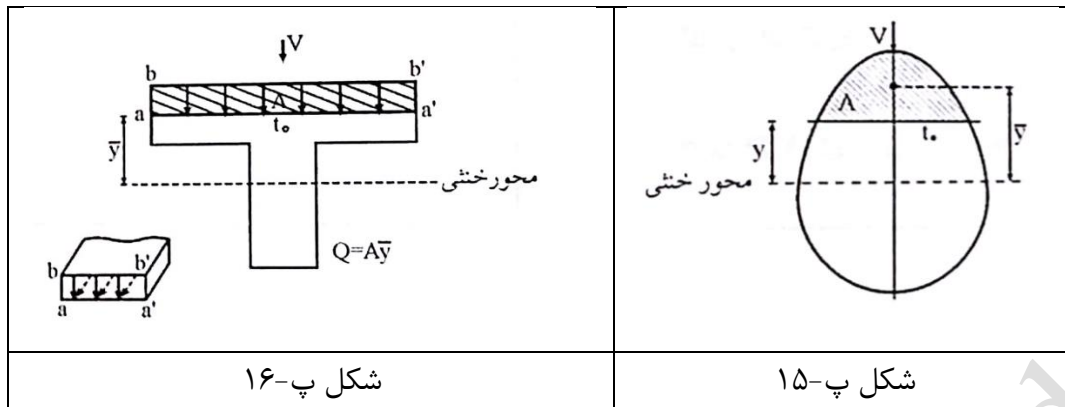
تنش برشی در تیرها

همانطور که در فصل ۱ توضیح داده شد، تنش برشی میانگین در تیرها برابر است با $\tau_{ave} = \frac{P}{A}$ که در آن توزیع تنش در مقطع تیر است یکسان فرض شده است در حقیقت تنش برشی در نقاط مختلف مقطع متفاوت است و داریم:

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

که در آن $Q = \bar{y}A$ و $\bar{y}$ فاصله مرکز سطح A از تار خنثی می باشد.

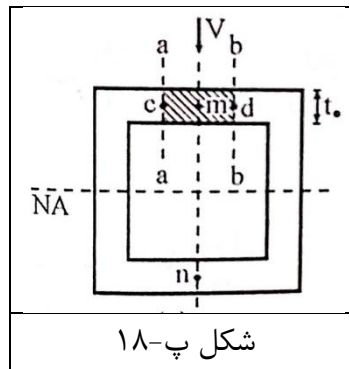
در شکل های زیر مقادیر A و $\bar{y}$ نشان داده شده است.



عبارت $\frac{VQ}{I}$ را با q نشان می دهند که شدت نیروی برشی بر واحد طول را نشان می دهد و جریان برش نام دارد.

در فرمول $\tau = \frac{VQ}{It}$ ، I همان اینرسی کل مقطع نسبت به محور خنثی است و t طول برش در مقطع است ضمناً برش باید جوری زده شود که مقطع را به دو قسمت مجزا تقسیم کند.

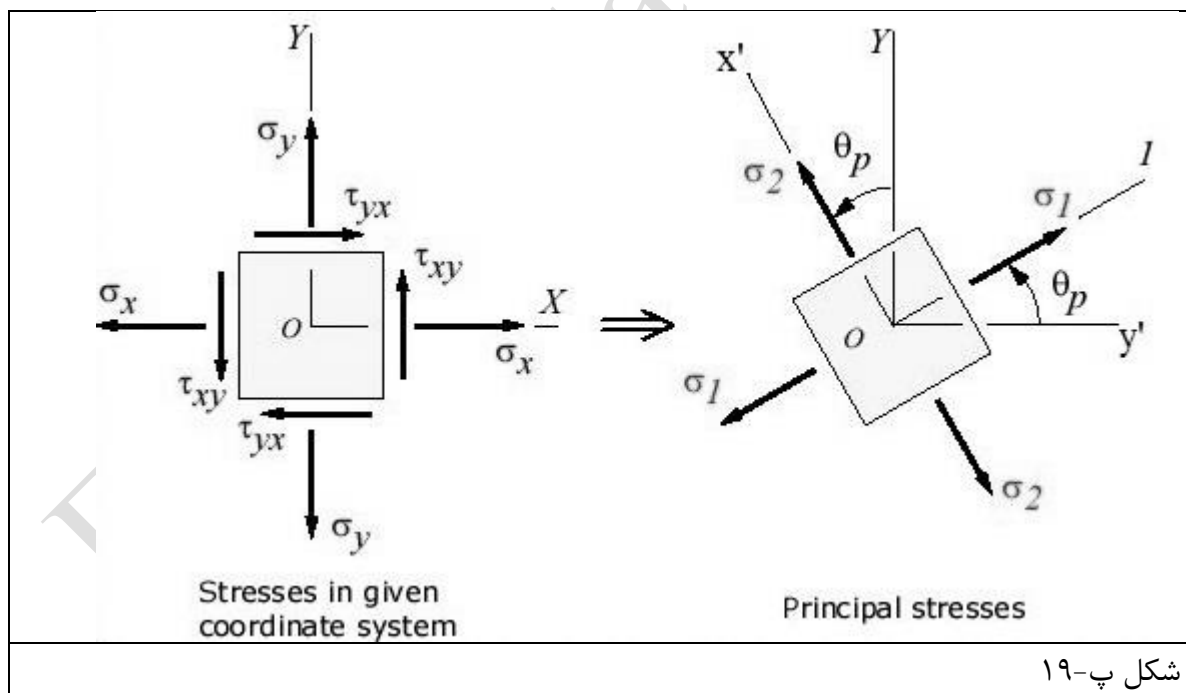
به عنوان مثال در شکل زیر برای به دست آوردن تنش برشی در نقطه C با برش $a-a$ مقطع به دو قسمت مجزا تقسیم نمیشود بنابراین باید برشی در نقطه d ، قرینه C نسبت به محور تقارن برش زده شود تا مقطع به دو قسمت مجزا تقسیم شود بنابراین t در فرمول با $2t_0$ جایگزین خواهد شد.



- اگر مقطعی دارای محور تقارن باشد و نیروی برشی در امتداد این محور به مقطع وارد شود تنش برشی یا جریان برشی در نقاطی که توسط محور تقارن برش زده می شود برابر صفر است.

تبدیل تنش:

در حالت دو بعدی در صفحه $X - Y$ جهاتی را که در آن تنش σ'_x و σ'_y ماکزیمم یا مینیموم گردد، جهات اصلی تنس نامیده می شوند و مقادیر تنش در آن جهات را تنش های اصلی σ_1 و σ_2 می نامند که با فرمول زیر محاسبه می شوند:



$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

در سایر صفحات کفایت تنش های مربوط به همان صفحه ها را جایگذاری کنیم.

Ebrahim Sadeghi Rad