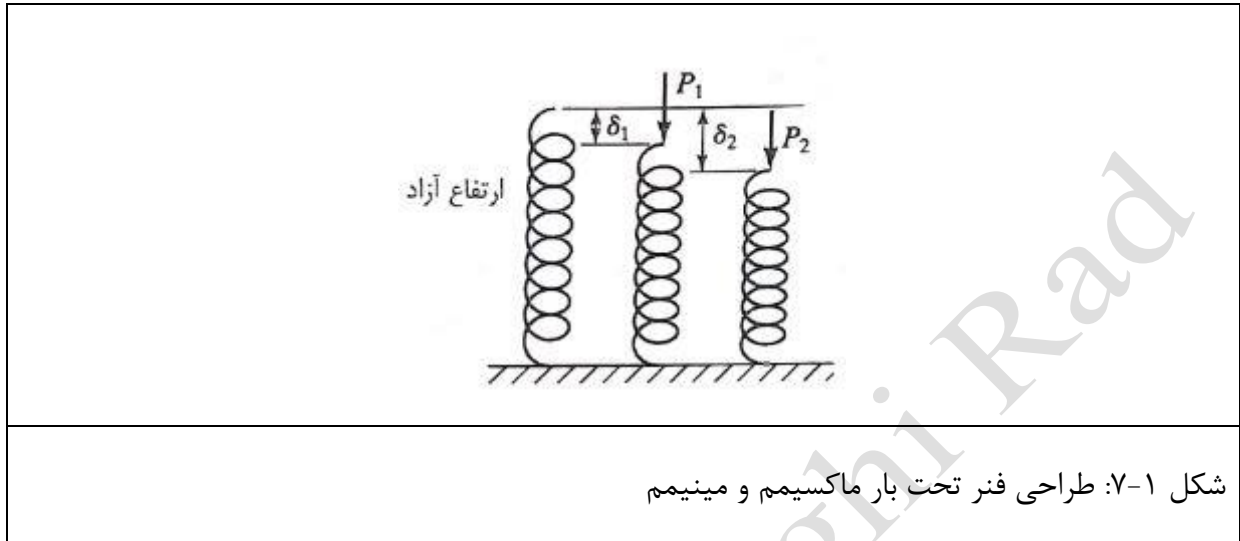


جلسه پنجم

طراحی فنر تحت بار ماکسیمم و مینیمم ($P_{\max}, P_{\min}$)



با در نظر گرفتن مقادیر ماکسیمم و مینیمم برای نیروها و جابجایی های معادل با آنها برای فنر در حالت بهینه داریم:

$$P_1 = K\delta_1 \rightarrow P_{\min} = K\delta_{\min}$$

$$P_2 = K\delta_2 \rightarrow P_{\max} = K\delta_{\max}$$

با یاد آوری روابط زیر:

$$V = \frac{1}{2} \pi^2 d^2 R (N_c + Q)$$

$$\tau = K_s \frac{16PR}{\pi d^3}$$

و جایگذاری مقادیر ماکسیمم و مینیمم برای عبارت تنش برشی ماکسیمم داریم:

$$\tau_{\max} = K_s \frac{16P_{\max} R}{\pi d^3}$$

$$\tau_{\min} = K_s \frac{16P_{\min} R}{\pi d^3}$$

همچنین برای مقادیر جابجایی ماکسیمم و مینیمم داریم:

$$\delta_{\max} = \frac{64R^3 N_c P_{\max}}{Gd^4}$$

$$\delta_{\min} = \frac{64R^3 N_c P_{\min}}{Gd^4}$$

با تعریف مقدار دلتا اختلاف جابجایی ماکسیمم و مینیمم داریم:

$$\Delta = \delta_{\max} - \delta_{\min} = \frac{64R^3 N_c}{Gd^4} (P_{\max} - P_{\min}) \rightarrow N_c = \frac{\delta_{\max} - \delta_{\min}}{\frac{64R^3}{Gd^4} (P_{\max} - P_{\min})}$$

حال با به دست آوردن تعداد حلقه های فعال فنر می توان حجم آن را به صورت زیر به دست آورد:

$$V = \frac{1}{2} \pi^2 d^2 R \left(\frac{Gd^4 (\delta_{\max} - \delta_{\min})}{64R^3 N_c (P_{\max} - P_{\min})} + Q \right) \xrightarrow{C=\frac{2R}{d}} V = \frac{1}{2} \pi^2 \left(\frac{2R}{c} \right)^2 R \left(\frac{GR(\delta_{\max} - \delta_{\min})}{4c^3 (P_{\max} - P_{\min})} + Q \right)$$

جهت بهینه سازی حجم باید مشتق نسبی آن نسبت به متغیر شعاع حلقه فنر را محاسبه و برابر با صفر قرار داد بدیهی است که تنها حالت ممکن به شرح زیر به دست خواهد آمد:

$$\frac{\partial V}{\partial R} = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \delta_{\max} = 2\delta_{\min} \\ P_{\max} = 2P_{\min} \rightarrow \tau_{\max} = 2\tau_{\min} \end{array} \right. \text{ Or } \left\{ \begin{array}{l} \delta_{\min} = \frac{1}{2}\delta_{\max} \\ P_{\min} = \frac{1}{2}P_{\max} \rightarrow \tau_{\min} = \frac{1}{2}\tau_{\max} \end{array} \right.$$

بنابراین می توان نتیجه گرفت که فنرها در حالت بهینه باید:

(۱) در حالت کاملاً باز قادر به وارد کردن نیروی مشخص P_1 باشند

(۲) در حالت کاملاً فشرده تنش برشی پیچشی آنها نباید از مقدار معین τ_2 تجاوز کند.

مثال:

می‌خواهیم که یک فنر فولادی طوری طراحی کنیم در حالت کاملاً باز نیرویی مانند $P_1 = 135 \text{ N}$ وارد کند و پس از اینکه به اندازه $\delta_2 - \delta_1 = 9.4 \text{ mm}$ فشرده می‌شود تنش برشی پیچشی τ_2 آن از 500 MPa تجاوز نکند. محدودیتهای فضایی ایجاب می‌کند که شعاع میانگین فنر حدوداً 10 mm باشد. مدول برشی را برابر با $G = 77000 \text{ N/mm}^2$ فرض کنید.

(الف) قطر سیم فنر، تعداد حلقه‌های فعال و حجم ماده حلقه‌های فعال را برای بهترین فنر حساب کنید.
(ب) فرض کنید طراح بدخواه تصمیم بگیرد. این فنر را از سیم شماره 9 طراحی کند. مقدار ماده‌ی حلقه‌های فعال این فنر را حساب کرده و آنرا با حجم بدست آمده در قسمت (الف) مقایسه کنید. مقدار R را باز هم 10 mm فرض کنید. $G = 77000 \text{ N/mm}^2$.

اطلاعات داده شده: $G = 77000 \text{ N/mm}^2$; $P_1 = 135 \text{ N}$; پس از فشردن فنر به اندازه $\delta_2 - \delta_1 = 9.4 \text{ mm}$ ، تنش برشی پیچشی باید به صورت $\tau_2 \leq 500 \text{ MPa}$ باشد. (تقریبی) $R = 10 \text{ mm}$

حل:

جزئیات حل: از تنش برشی عرضی صرف‌نظر می‌کنیم.
(الف) برای فنر بهینه داریم

$$\tau_1 = 0.5 \times 500 = 250 \text{ MPa}$$

$$d^3 = \frac{16 P_1 R}{\pi \tau_1} = \frac{16 \times 135 \times 10}{250 \pi} = 27.5; \quad d = 3.185 \text{ mm} = 0.125 \text{ in.}$$

از جدول (۷-۱) برای سیم شماره 11 داریم

$$d = 0.1205 \text{ in.} = 3.06 \text{ mm}$$

$$R = \frac{\pi \tau_1 d^3}{16 P_1} = \frac{\pi 250 \times 3.06^3}{16 \times 135} = 10.42 \text{ mm} \quad (\text{مقدار تنظیم شده})$$

$$N_c = \frac{d^4 G \delta_1}{64 P_1 R^3} = \frac{3.06^4 \times 77000 \times 9.4}{64 \times 135 \times 10.42^3} = 6.49 \quad (\text{حلقه فعال})$$

$$V_{\min} = \frac{1}{2} \pi^2 d^2 R N_c = \frac{1}{2} \pi^2 3.06^2 \times 10.42 \times 6.49 = 3125 \text{ mm}^3$$

(ب) با استفاده از جدول (۷-۱) برای سیم شماره ۹ داریم

$$d = 0.1483 \text{ in} = 3.767 \text{ mm}$$

$$P_2 = \frac{\pi d^3 \tau_2}{16 R} = \frac{\pi 3.767^3 \times 500}{16 \times 10} = 525 \text{ N}$$

به دلیل تغییر در مقدار $P_2 - P_1$ ، تعداد حلقه های فعال فنر از به صورت زیر حساب می شود

$$N_c = \frac{d^4 G (\delta_2 - \delta_1)}{64 (P_2 - P_1) R^3} = \frac{3.767^4 \times 77000 \times 9.4}{64 (525 - 135) \times 10^3} = 5.84 \text{ (حلقه فعال)}$$

$$V = \frac{1}{2} \pi^2 d^2 R N_c = \frac{1}{2} \pi^2 (3.767)^2 \times 10 \times 5.84 = 4098 \text{ mm}^3$$

نسبت حجمها عبارت است از

$$\frac{V}{V_{min}} = \frac{4089}{3125} = 1.31$$

بنابراین، قطری که به طور دلخواه در قسمت (ب) برای سیم فنر انتخاب شد، قطر مناسبی نبود. زیرا حجم ماده فنر ساخته شده از این سیم، نسبت به ماده فنر بهینه، ۳۱ درصد بیشتر است.