

مقاومت مصالح

جلسه چهارم

فصل دوم

کرنش و تغییر مکان

کرنش مهندسی:

اگر فاصله دونقطه بر روی قطعه‌ای L_0 باشد و پس از بارگذاری این فاصله L شود کرنش مهندسی به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{\delta}{L_0}$$

وقتی که δ خیلی کوچک‌تر از L_0 باشد ($\delta \ll L_0$)

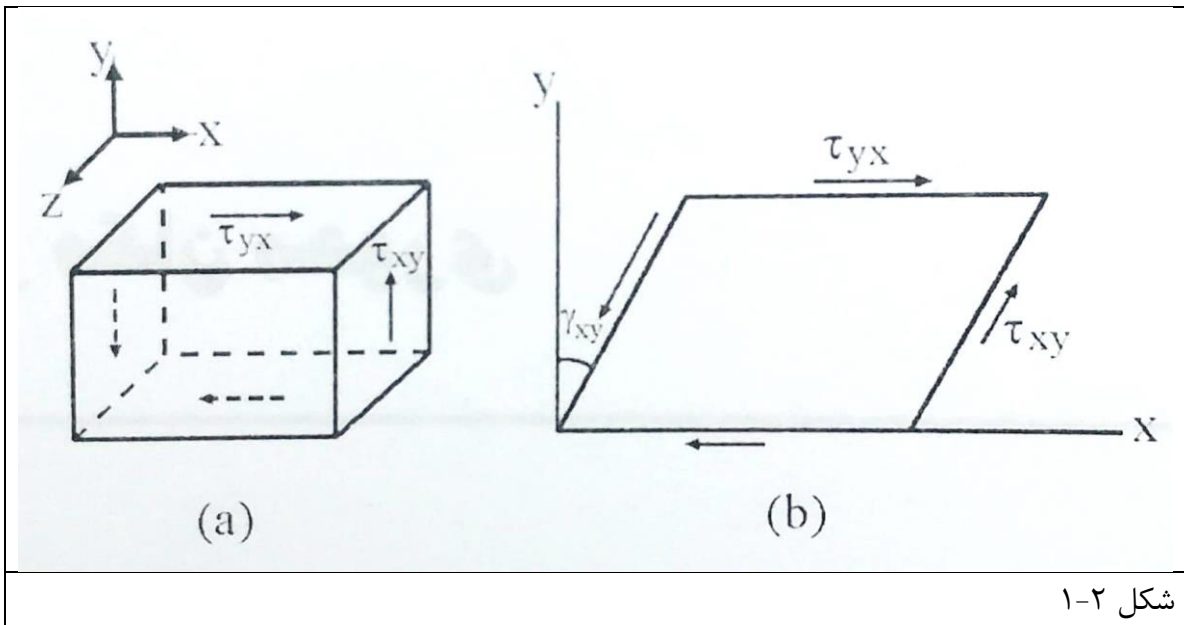
کرنش حقیقی:

مجموع کرنش‌ها در هر لحظه کرنش واقعی نامیده می‌شود. اگر تغییر مکان را dl بنامیم و فاصله دونقطه در همان لحظه l باشد کرنش واقعی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\varepsilon_t = \int_{L_0}^L \frac{dl}{l} = \ln\left(\frac{L}{L_0}\right)$$

کرنش برشی:

تغییر شکل المانی مکعب شکل که تحت تنش برشی واقع شده است به صورت شکل زیر در نظر بگیرید :



شکل ۱-۲

برای تغییر شکل‌های کوچک γ_{xy} کرنش برشی در صفحه $X-Y$ تعریف می‌شود و با واحد رادیان سنجیده می‌شود.

در صفحات $X-Z$ و $Y-Z$ به ترتیب کرنش‌های برشی را با γ_{xz} و γ_{yz} نشان می‌دهند.

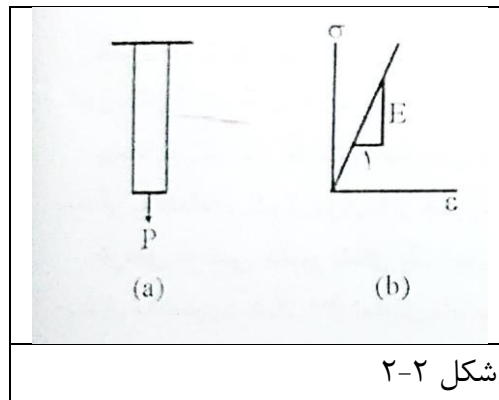
کرنش حرارتی:

اگر فاصله دونقطه از جسم L باشد با اعمال تغییر دما ΔT طول جسم به اندازه $\delta = \alpha L \Delta T$ تغییر خواهد کرد که در آن α ضریب انبساط حرارتی می‌باشد پس داریم:

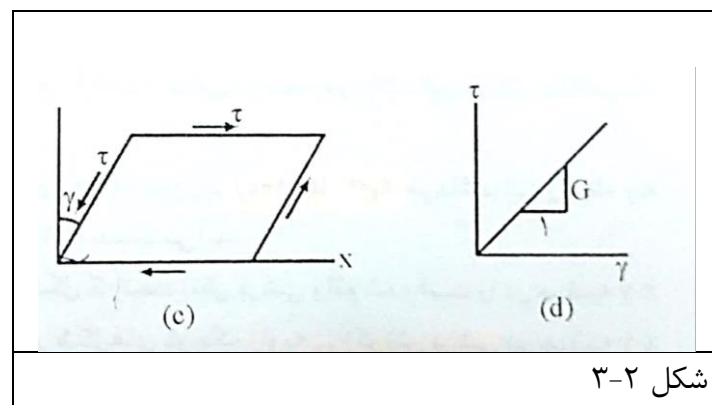
$$\epsilon_T = \frac{\delta}{L} = \frac{\alpha L \Delta T}{L} \rightarrow \epsilon_T = \alpha \Delta T$$

قانون هوک:

در تغییر مکان‌های کوچک رابطه تنش و کرنش اکثر مواد خطی می‌باشد و به صورت $\sigma = E \epsilon$ تعریف می‌گردد یعنی تنش با ضریب E که مدول الاستیسیته نامیده می‌شود با کرنش متناسب است.

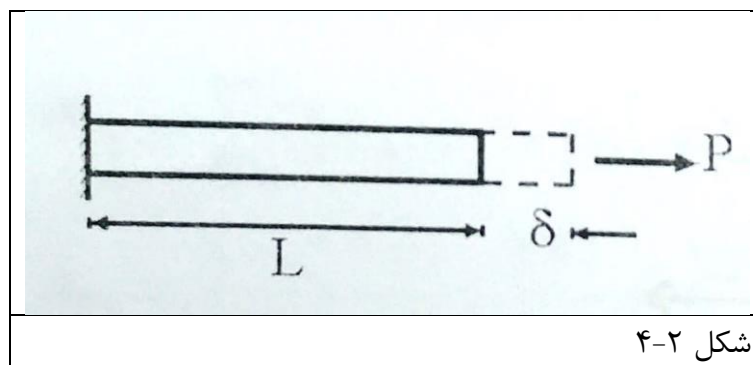


همچنین اگر المانی تحت کرنش قرار گیرد رابطه‌ی بین تنش برشی با کرنش برشی به صورت $\tau = G \gamma$ می‌باشد که در آن G مدول برشی است.



تغییر مکان محوری:

میله‌ای با سطح A که تحت بار P قرار دارد در نظر بگیرید داریم:

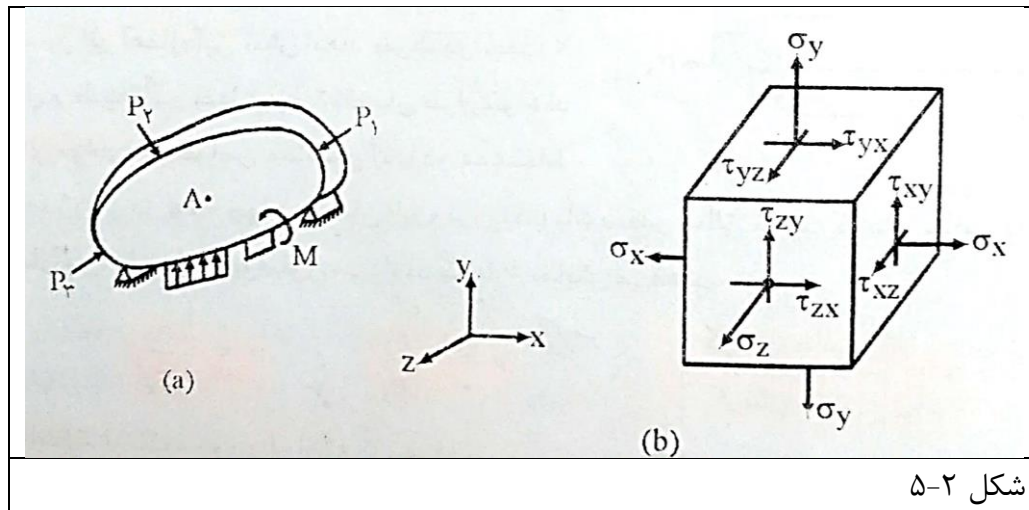


$$\sigma = E \varepsilon \rightarrow \frac{P}{A} = E \frac{\delta}{L} \rightarrow \delta = \frac{PL}{AE} = \frac{\sigma L}{E}$$

تانسور تنش:

در شکل نشان داده شده، تنش‌های عمودی با $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ مشخص شده‌اند، در تنش برشی τ_{ij} ، اندیس i نشان محور عمود بر صفحه است و اندیس j جهت تنش در صفحه را معین می‌کند و داریم

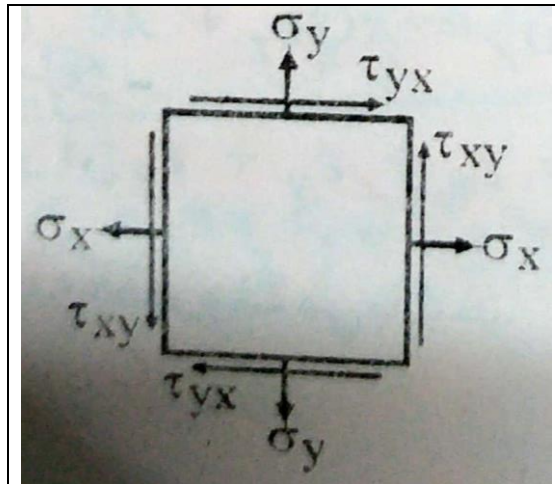
$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}$$



تنش‌های وارد بر یک المان را می‌توان به صورت ماتریس زیر نمایش داد که به آن تانسور تنش می‌گویند

$$[\sigma_{ij}] = \begin{matrix} \xrightarrow{\text{جهت نرمال}} \\ \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \downarrow \text{جهت تنش} \end{matrix}$$

در حالت دوبعدی در صفحه $x - y$ داریم:



شکل ۶-۲

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}, \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$$

برای یک المان، بی‌نهایت تانسور می‌توان در نظر گرفت، برای کلیه این تانسورها روابط زیر برقرار است

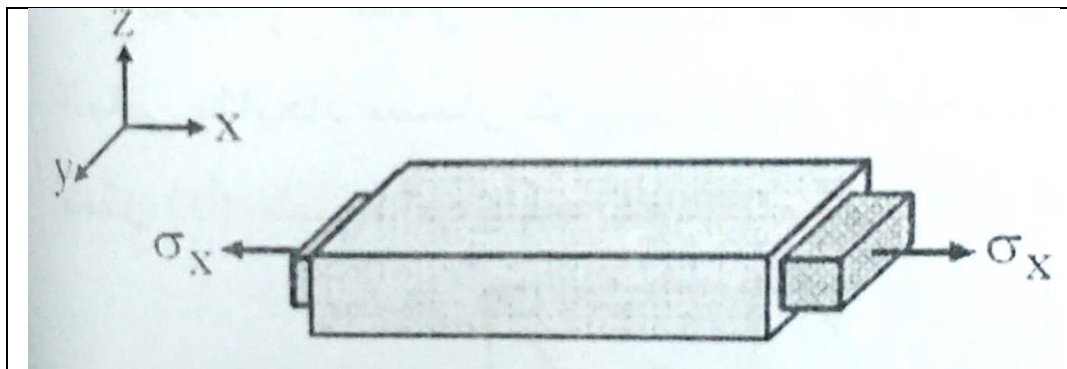
$$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$$

$$I_2 = \sigma_{xx} \sigma_{yy} + \sigma_{xx} \sigma_{zz} + \sigma_{yy} \sigma_{zz} - (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)$$

$$I_3 = \text{Det} [\sigma_{ij}]$$

که Det معرف دترمینان تانسور تنش می‌باشد.

ضریب پواسون (ν):



شکل ۷-۲

$$\nu = \left| \frac{korneshe - janebi}{korneshe - tooli} \right|, \nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \rightarrow \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$$