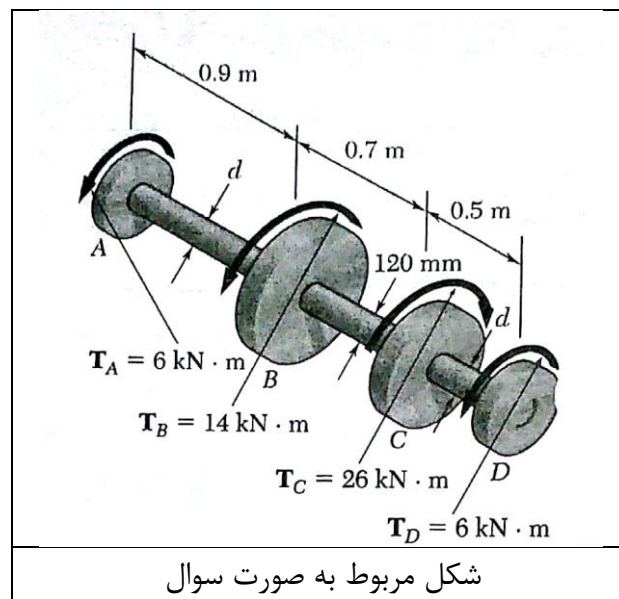


مقاومت مصالح

جلسه هشتم

مسئله نمونه ۱.۳

میل گردان توخالی BC دارای قطر داخلی و خارجی به ترتیب 90 mm و 120 mm است. میل گردانهای AB و CD توپر و به قطر d هستند. در بارگذاری مطابق شکل، مطلوب است (الف) ماکزیمم و مینیمم تنش برشی در میل گردان BC ، و (ب) قطر لازم d در میل گردانهای AB و CD اگر تنش برشی مجاز در این محورها 65 MPa باشد.



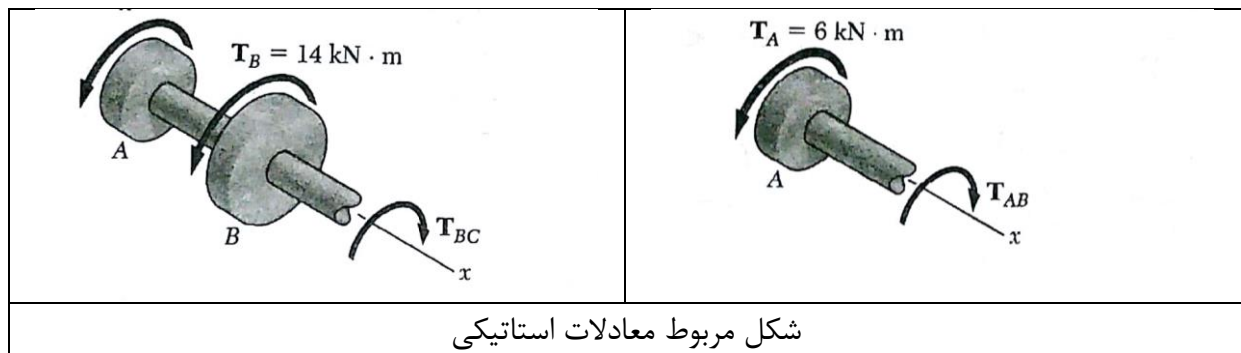
● حل:

معادله‌های استاتیک. گشتاور پیچشی وارد بر میل گردان AB را با T_{AB} نشان می‌دهیم، و مقطعی از میل گردان AB می‌گذرانیم، و برای نمودار جسم آزاد نشان داده شده، می‌نویسیم

$$\Sigma M_x = 0: \quad (6\text{ kN.m}) - T_{AB} = 0 \quad T_{AB} = 6\text{ kN.m}$$

حال مقطعی از میل گردان BC می‌گذرانیم و برای نمودار جسم آزاد نشان داده شده، داریم

$$\Sigma M_x = 0: \quad (6\text{ kN.m}) + (14\text{ kN.m}) - T_{BC} = 0 \quad T_{BC} = 20\text{ kN.m}$$



الف. میل گردان BC . در این میل گردان توخالی، داریم

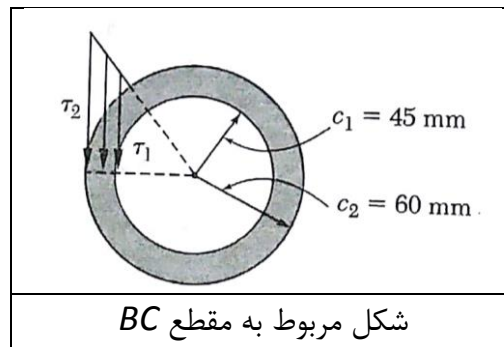
$$J = \frac{\pi}{2} (c_2^4 - c_1^4) = \frac{\pi}{2} [(0.060)^4 - (0.045)^4] = 13.92 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

تنش برشی ماکزیمم. در سطح خارجی، داریم

$$\tau_{\max} = \tau_r = \frac{T_{BC} c_2}{J} = \frac{(20 \text{ kN.m})(0.060 \text{ m})}{13.92 \times 10^{-6} \text{ m}^4} \quad \tau_{\max} = 86.2 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$

تنش برشی مینیمم. می نویسیم که تنشها با فاصله از محور میل گردان متناسب اند.

$$\frac{\tau_{\min}}{\tau_{\max}} = \frac{c_1}{c_2} \quad \frac{\tau_{\min}}{86.2 \text{ MPa}} = \frac{45 \text{ mm}}{60 \text{ mm}} \quad \tau_{\min} = 64.7 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$



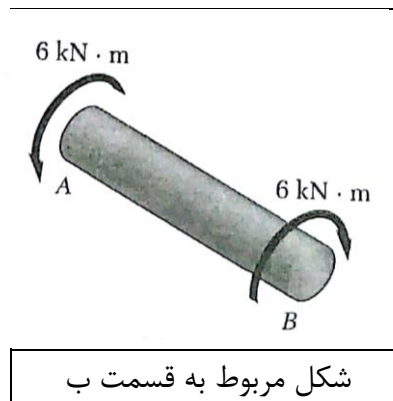
ب. میل گردانهای AB و CD . در هر دوی این میل گردانها، مقدار گشتاور پیچشی $T = 6 \text{ kN.m}$ و $\tau_{\text{all}} = 65 \text{ MPa}$ است. شعاع میل گردان را با c نشان می دهیم و می نویسیم

$$\tau = \frac{Tc}{J} \quad 65 \text{ MPa} = \frac{(6 \text{ kN.m})c}{\frac{\pi}{2} c^4}$$

$$c^3 = 58.8 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \quad c = 38.9 \times 10^{-3} \text{ m}$$

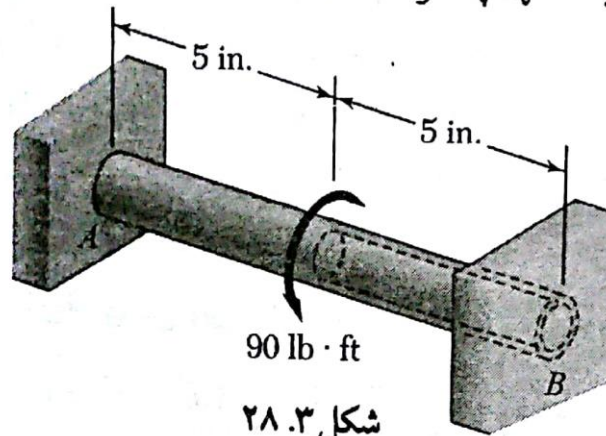
$$d = 2c = 2(38.9 \text{ mm})$$

$$d = 77.8 \text{ mm} \quad \blacktriangleleft$$



مثال ۵.۳

میل گردان دایره‌ای AB از یک استوانه فولادی به طول 10 in و قطر $\frac{7}{8}\text{ in}$ ساخته شده است که حفره‌ای به طول 5 in و قطر $\frac{5}{8}\text{ in}$ در انتهای B در آن ایجاد شده است. میل گردان از هر دو طرف به تکیه گاههای ثابت متصل است و گشتاوری برابر با $90\text{ lb}\cdot\text{ft}$ بر وسط آن وارد می‌شود (شکل ۲۸.۳). گشتاور وارد بر میل گردان از طرف هر یک از تکیه گاهها چقدر است؟

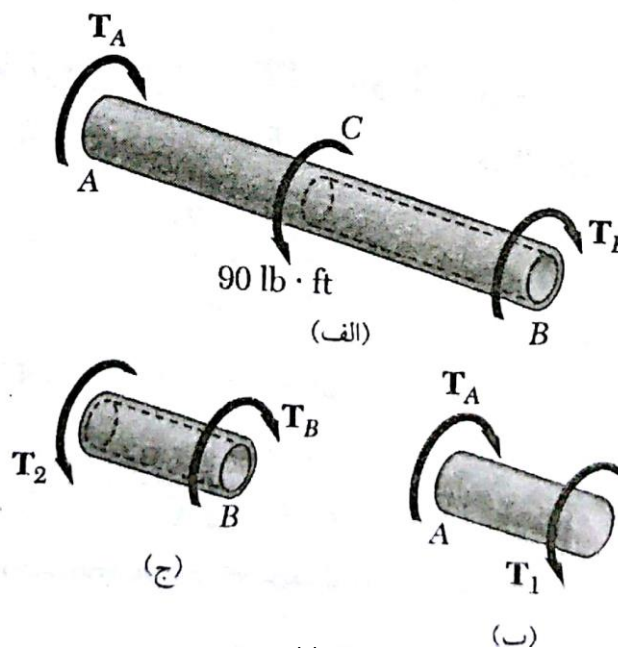


● حل :

با رسم نمودار آزاد میل گردان و نشان دادن گشتاورهای پیچشی وارد شده توسط تکیه گاهها با T_A و T_B [شکل ۲۹.۳ (الف)]، معادله تعادل را به دست می‌آوریم

$$T_A + T_B = 90\text{ lb}\cdot\text{ft}$$

از آنجا که این معادله برای تعیین دو مجهول گشتاور T_A و T_B کافی نیست، پس



میل گردان از نظر استاتیکی نامعین است.

اما، اگر توجه کنیم که زاویه کل پیچش میل گردان AB باید صفر باشد، می توان T_B و T_A را تعیین کرد، زیرا هر دو انتهای آن مقید شده اند. اگر ϕ_1 و ϕ_2 به ترتیب زوایای پیچش قسمت های AC و CB باشند، می نویسیم

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = 0$$

از نمودار آزاد قسمت کوچکی از میل گردان شامل انتهای A [شکل ۲۹.۳ (ب)] دیده می شود که گشتاور پیچشی داخلی T_1 در قسمت AC برابر T_A است؛ از نمودار جسم آزاد قسمت کوچکی از میل گردان شامل انتهای B [شکل ۲۹.۳ (ج)] دیده می شود که گشتاور پیچشی T_2 در CB برابر با T_B است. با یادآوری معادله (۱۶.۳) و مشاهده اینکه قسمت های AC و CB از میل گردان در خلاف جهت یکدیگر می پیچند، می نویسیم

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = \frac{T_A L_1}{J_1 G} - \frac{T_B L_2}{J_2 G} = 0$$

مقدار T_B از رابطه بالا برابر است با

$$T_B = \frac{L_1 J_2}{L_2 J_1} T_A$$

با قرار دادن مقادیر عددی زیر

$$L_1 = L_2 = 5 \text{ in}$$

$$J_1 = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{7}{16} \text{ in} \right)^4 = 57.6 \times 10^{-3} \text{ in}^4$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \pi \left[\left(\frac{7}{16} \text{ in} \right)^4 - \left(\frac{5}{16} \text{ in} \right)^4 \right] = 42.6 \times 10^{-3} \text{ in}^4$$

می نویسیم

$$T_B = 0.740 T_A$$

با قرار دادن این عبارت در معادله اصلی تعادل به دست می آوریم

$$1.740 T_A = 90 \text{ lb.ft}$$

$$T_A = 51.7 \text{ lb.ft} \quad T_B = 38.3 \text{ lb.ft}$$