

جلسه دهم

فصل سوم : روش انرژی

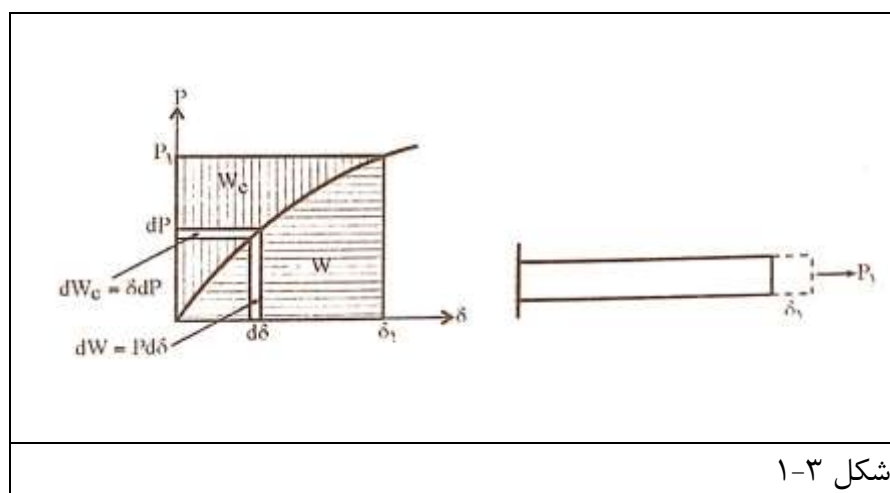
در اثر اعمال عوامل خارجی بر روی جسم و تغییر شکل آن توسط عواملی چون نیرو و یا گشتاور و ایجاد تغییر مکان یا دوران نقاط تحت اثر نیرو و گشتاور خارجی، بر روی جسم کار انجام می شود.

اگر جسم از ماده الاستیک ساخته شده باشد و کار انجام شده روی آن منجر به تغییر شکل گردد، این کار بصورت انرژی داخلی که انرژی کرنشی نامیده می شود در آن ذخیره می گردد و داریم:

$$U=W$$

که در آن U انرژی داخلی ذخیره شده و W کار انجام شده می باشد.

میله زیر را در نظر بگیرید که در اثر اعمال نیروی P نهایتاً به اندازه δ_1 تغییر مکان می دهد. کار انجام شده یا به عبارتی انرژی ذخیره شده در میله عبارت است از:



$$W = \int_0^{\delta_1} P d\delta$$

که برابر است با سطح زیر منحنی $P - \delta$ (نیرو - تغییر مکان) در فاصله 0 تا δ_1 .

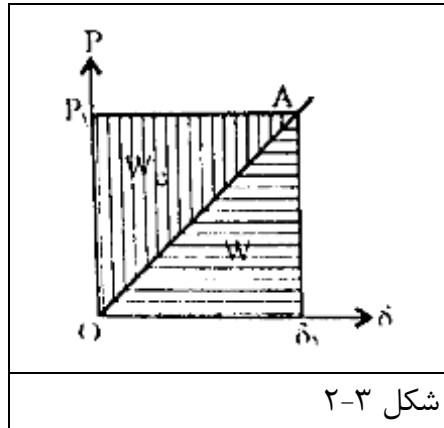
نوع دیگری از کار که کار متمم نامیده می شود بنابر تعریف برابر است با:

$$W_C = \int_0^{P_1} \delta dP$$

که برابر است با سطح محصور منحنی نیرو - تغییر مکان در فاصله 0 تا P_1 .

در صورتی که رابطه بین نیرو و تغییر مکان خطی باشد مقدار کار و کار متمم برابرند یعنی :

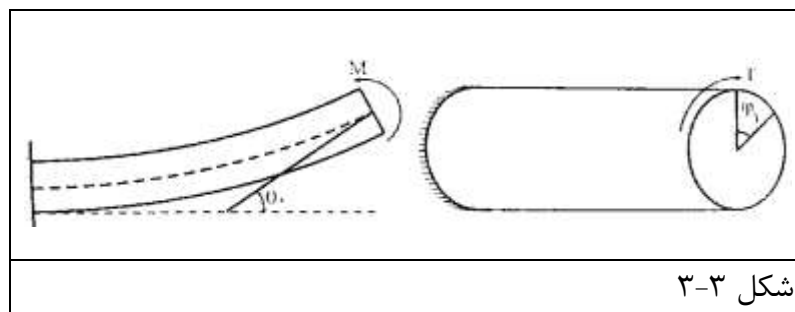
$$W = W_C = \frac{1}{2} P_1 \delta_1$$



به همین صورت برای میله های تحت پیچش و گشتاور خمشی کار انجام شده به شکل زیر محاسبه می گردد.

$$W = \int_0^{\phi} T d\phi$$

$$W = \int_0^{\theta} M d\theta$$



چگالی انرژی کرنشی

انرژی کرنشی بر واحد حجم را چگالی انرژی کرنشی می نامند و با تقسیم بر حجم ($V=AL$) و دانستن $d\varepsilon = \frac{d\delta}{L}$ و

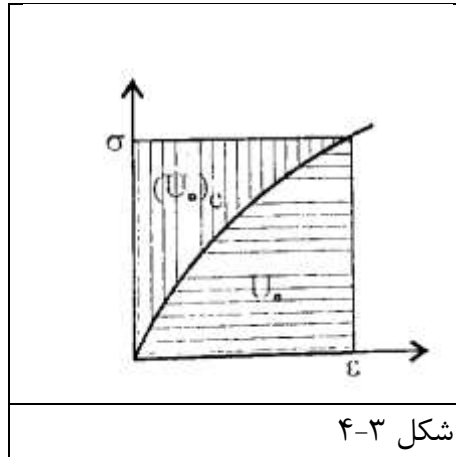
برای چگالی انرژی کرنشی U_0 داریم.

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

$$U_0 = \int_0^{\varepsilon_1} \sigma d\varepsilon$$

به همین ترتیب چگالی انرژی متمم برابر است با :

$$(U_0)_C = \int_0^{\sigma_1} \varepsilon d\sigma$$



در حالتی که رابطه تنش و کرنش خطی باشد چگالی انرژی کرنشی و چگالی انرژی متمم با هم برابر و مساوی با $\frac{1}{2} \sigma \varepsilon$ هستند.

اگر ماده از قانون هوک پیروی کند ($\sigma = E\varepsilon$) یعنی داریم:

$$U_0 = \int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon} E\varepsilon d\varepsilon = \frac{1}{2} E\varepsilon^2 = \frac{\sigma^2}{2E}$$

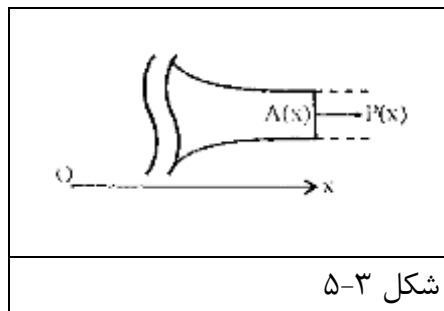
بنابراین انرژی کرنشی جسمی که تحت تنش محوری σ_X در جهت X قرار داشته باشد برابر است با :

$$U = \int_V U_0 dV = \int_V \frac{\sigma_x^2}{2E} dV = \int_V \frac{E\varepsilon_x^2}{2} dV$$

انرژی کرنشی میله تحت نیروی محوری

در صورتی که میله ای به طول L تحت نیروی $P(X)$ در فاصله X از مبدا با سطح مقطع $A(X)$ قرار داشته باشد داریم:

$$U = \int_0^L \frac{P^2(x)}{2EA(x)} dx$$



برای میله به طول L با بار ثابت P و سطح مقطع ثابت A داریم :

$$U = \frac{P^2 L}{2AE}$$

قضیه کاستیگلیانو

برای بدست آوردن تغییر مکان سازه های خطی می توان مشتق انرژی کرنشی را نسبت به نیروی دلخواه P_i محاسبه نمود یعنی:

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i}$$

اگر δ_i مثبت باشد تغییر مکان در جهت نیروست و بالعکس.

و دوران سازه در نقطه اعمال گشتاور M_i برابر است با :

$$\theta_i = \frac{\partial U}{\partial M_i}$$

تغییر مکان خرپاها

اگر خرپایی از n میله تشکیل شده باشد داریم:

$$U = \sum_{j=1}^n \frac{F_j^2 L_j}{2A_j E_j}$$

بنابر قضیه کاستیگلیانو تغییر مکان در محل اعمال بار p_i برابر است با :

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} = \sum_{j=1}^n \frac{F_j L_j}{A_j E_j} \frac{\partial F_j}{\partial P_i}$$

که در آن F_j نیروی محوری میله j ام می باشد.