

جلسه دوم

باتوجه به اینکه $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ داریم:

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + \tau_{xy} \sin 2\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

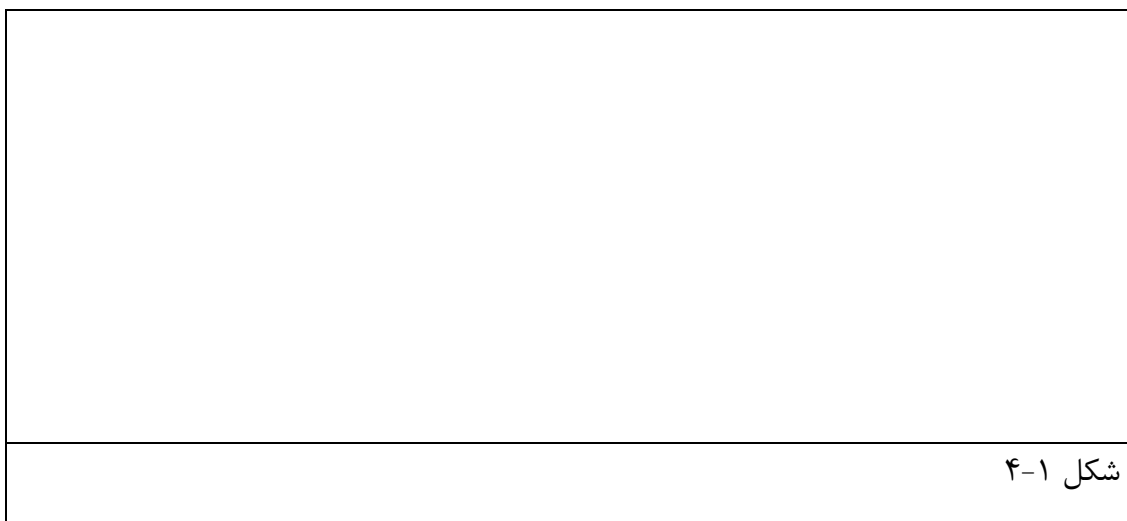
تنش در جهت y' با جایگزینی $\theta \rightarrow \theta + \frac{\pi}{2}$ در فرمول $\sigma_{x'}$ بدست می آید:

$$\sigma_{y'} = \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - \tau_{xy} \sin 2\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

- تنش های نرمال σ_x و σ_y در حالت کششی مثبت در نظر گرفته می شود.

- در صورتی که جهت گشتاور τ_{xy} که بر محور x عمود است، حول یک نقطه داخل همان پاد ساعتگرد باشد، علامت آن مثبت در نظر گرفته میشود.

- برای تعیین علامت θ از محور x به سمت خط عمود بر صفحه حرکت میکنیم، در صورت پاد ساعتگرد بودن جهت حرکت علامت θ مثبت است.



شکل ۴-۱

تنش های اصلی:

با تغییر زاویه θ در معادلات قبل، مقادیر بسیاری از $\sigma_{x'}$ در جهات مختلف بدست می آید، جهاتی که در آن تنش های $\sigma_{x'}$ و $\sigma_{y'}$ ماکزیمم و مینیموم گردد، جهات اصلی و مقادیر تنش در آنها مقادیر اصلی خواهند بود.

بنابراین برای بدست آوردن مقادیر اصلی تنش متناظر با جهات اصلی باید مشتق $\sigma_{x'}$ نسبت به θ را برابر صفر قرار دهیم. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_{x'}}{d\theta} = 0 &\rightarrow \frac{\sigma_{x'}}{d\theta} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} (2 \sin 2\theta) + \tau_{xy} (-2 \cos 2\theta) \\ \rightarrow \left. \frac{\sigma_{x'}}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_p} = 0 &\rightarrow \frac{\sin 2\theta_p}{\cos 2\theta_p} = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \rightarrow \tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \\ \rightarrow \tan^{-1} 2\theta_p = \tan^{-1} \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right) &\rightarrow \theta_p = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right)\end{aligned}$$

بنابراین با جایگذاری θ_p در معادله $\sigma_{x'}$ و $\sigma_{y'}$ مقادیر تنش ماکزیمم و مینیموم بدست می آیند و داریم:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

با جایگزینی θ_p بدست آمده، رابطه $\tau_{x'y'} = 0$ خواهد شد. بنابراین تنش های اصلی در صفحه ای رخ خواهد داد که در آن تنش برشی برابر صفر باشد.

تنش برشی ماکزیمم:

برای تعیین تنش برشی max در حالت دو بعدی باید از رابطه $\tau_{x'y'}$ نسبت به θ مشتق گرفت و مساوی صفر قرار داد، پس داریم:

$$\frac{\tau_{x'y'}}{d\theta} = 0 \rightarrow \frac{\sigma_{x'}}{d\theta} = -(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta - 2\tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\rightarrow \left. \frac{\tau_{x'y'}}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_s} = 0 \rightarrow \tan 2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

$$\rightarrow \tan^{-1} 2\theta_s = \tan^{-1} \left(-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \right) \rightarrow \theta_s = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \right)$$

بنابر این با توجه به تغییرات $\tan$ زاویه، تنش برشی $\max$ به روی دو صفحه ی عمود بر هم با زوایای θ_s و $\theta_s + \frac{\pi}{4}$ رخ

می دهد. با جایگزینی θ_s در رابطه $\tau_{x'y'}$ داریم:

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Mgosoft PDF Encrypt