

جلسه سوم

راه دیگر برای پیدا کردن تنش های اصلی، پیدا کردن مقادیر اصلی تانسور تنش می باشد به عنوان مثال برای تانسور های زیر تنش های اصلی به شکل زیر بدست می آیند

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 45 & 30 \\ 30 & -35 \end{bmatrix} \rightarrow \det \begin{vmatrix} 45-\sigma & 30 \\ 30 & -35-\sigma \end{vmatrix} = 0$$

* باید دترمینال ماتریس روبرو را محاسبه کرد و آن را مساوی صفر قرار داد

* از معادله درجه دوم محاسبه می شود

$$\begin{bmatrix} 55 & 0 \\ 0 & 45 \end{bmatrix} \rightarrow \det \begin{bmatrix} 55 & 0 \\ 0 & 45 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow (45-\sigma)(-35-\sigma) - 30 \times 30 = 0 \rightarrow$$

$$\sigma^2 - 10\sigma - 2475 = 0 \rightarrow \sigma_1 = 55, \sigma_2 = -45$$

در حالت سه بعدی داریم :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 45 & 30 & 0 \\ 30 & 120 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{bmatrix} \rightarrow \det \begin{vmatrix} 45-\sigma & 30 & 0 \\ 30 & 120-\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 50-\sigma \end{vmatrix}$$

از حل معادله درجه سوم تنش ها محاسبه می شوند

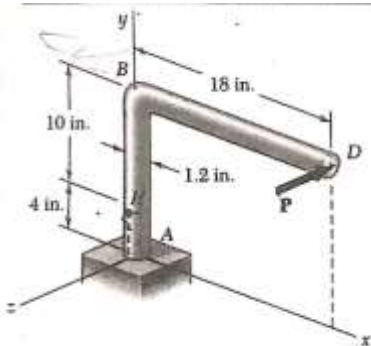
$$\sigma^3 - 2106^2 - 1900\sigma - 195000 = 0 \rightarrow \sigma_1 = 130, \sigma_2 = 30, \sigma_3 = 50$$

در حالتی که تنش های اصلی را بدست آوردیم می توانیم مقدار تنش برشی ماکزیمم را از رابطه زیر بدست آوریم:

$$\tau_{\max} = \max \left(\frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}, \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2}, \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} \right)$$

مسئله نمونه ۱.۷

بار متمرکز افقی P به مقدار 150 lb بر انتهای D اهرم ABD وارد شده است. اگر قطر قسمت AB اهرم 1.2 in باشد، مطلوب است (الف) تنشهای عمودی و برشی در جزئی واقع در نقطه H که پالهای آن موازی با محورهای x و y هستند، (ب) صفحههای اصلی و تنشهای اصلی در نقطه H .



حل:

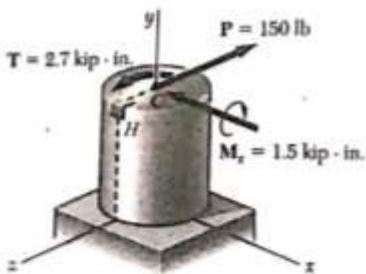
دستگاه کوپل - نیرو، نیروی P را با دستگاه کوپل - نیرویی معادل در مرکز C مقطع عرضی شامل نقطه H جایگزین می‌کنیم.

$$P = 150 \text{ lb}$$

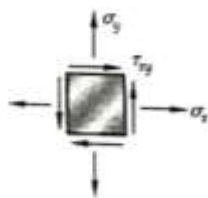
$$T = (150 \text{ lb})(18 \text{ in}) = 2.7 \text{ kip} \cdot \text{in}$$

$$M_x = (150 \text{ lb})(10 \text{ in}) = 1.5 \text{ kip} \cdot \text{in}$$

الف: تنشهای σ_x ، σ_y و τ_{xy} در نقطه H با رعایت علامتهای قراردادی نشان داده شده در شکل ۲.۷، جهت و علامت هر کدام از مؤلفه‌های تنش را با بررسی دقیق نمودار دستگاه کوپل - نیرو در نقطه C محاسبه می‌کنیم:



Mgosoft PDF Encrypt



$$\sigma_y = + \frac{M_y}{I_y} + \frac{(1.5 \text{ kip} \cdot \text{in})(0.6 \text{ in})}{\frac{1}{4} \pi (0.6 \text{ in})^3} \quad \sigma_y = + 8.84 \text{ ksi}$$

$$\tau_{xy} = + \frac{T_c}{J} = + \frac{(2.7 \text{ kip} \cdot \text{in})(0.6 \text{ in})}{\frac{1}{4} \pi (0.6 \text{ in})^4} \quad \tau_{xy} = + 7.96 \text{ ksi}$$

می‌بینیم که نیروی برشی P هیچ‌گونه تنش برشی در نقطه H ایجاد نمی‌کند.

ب: صفحه‌های اصلی و تنشهای اصلی. با قراردادن مقادیر مؤلفه‌های تنش در معادله (۱۲.۷)، سمت‌گیری صفحه‌های اصلی را تعیین می‌کنیم:

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2(7.96)}{0 - 8.84} = -1.80$$

$$2\theta_p = -61.9^\circ \text{ و } 180^\circ - 61.9^\circ = +118.1^\circ \quad \theta_p = -30.95^\circ \text{ و } +59.05^\circ$$

با قراردادن مقادیر در معادله (۱۴.۷)، مقدار تنشهای اصلی را تعیین می‌کنیم

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{0 + 8.84}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0 - 8.84}{2}\right)^2 + (7.96)^2}$$

$$= +4.42 \pm 9.10$$

$$\sigma_{\max} = +13.52 \text{ ksi}$$

$$\sigma_{\min} = -4.68 \text{ ksi}$$

با توجه به وجه ab جزء نشان داده شده، با قراردادن $\theta_p = -30.95^\circ$ در معادله (۵.۷) به‌دست می‌آوریم $\sigma_{x'} = -4.68 \text{ ksi}$ نتیجه می‌گیریم تنشهای اصلی مطابق شکل هستند.

