

جلسه چهارم

:

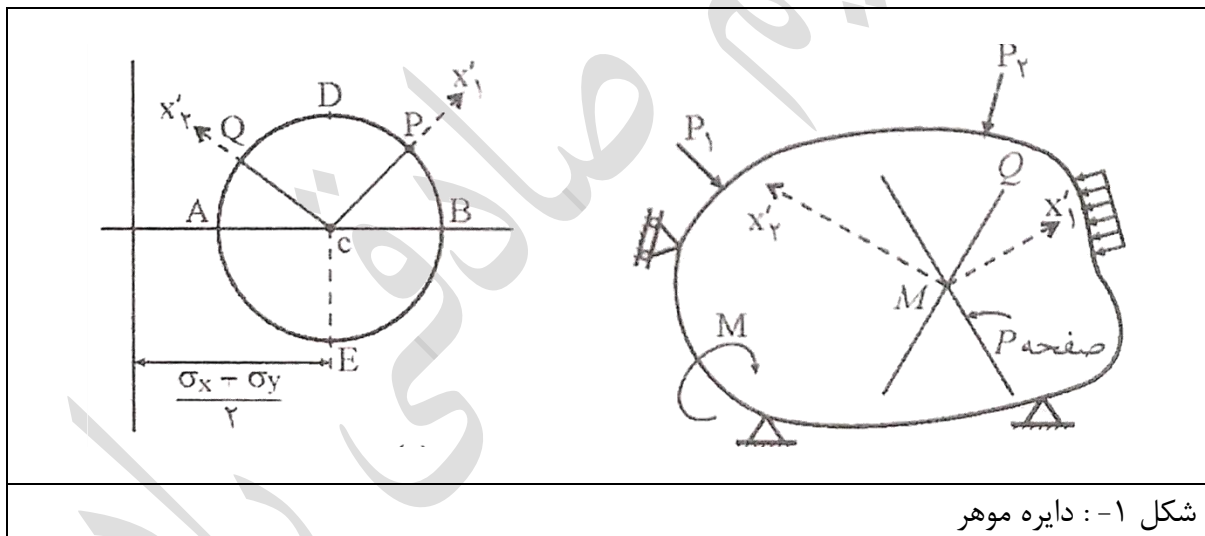
دایره موهر :

تنش های $\sigma_{x'}$ و $\tau_{x'y'}$ را می توان علاوه بر تنش های گفته شده از روش هندسی نیز محاسبه کرد، با حذف θ از روابط مربوط $\sigma_{x'}$ و $\tau_{x'y'}$ داریم:

$$\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

با در نظر گرفتن محور های مختصات $\sigma_{x'}$ و $\tau_{x'y'}$ و مقایسه معادله فوق و معادله دایره می توان دریافت که در مختصات $\sigma_{x'}$ و $\tau_{x'y'}$ دایره ای

با مختصات مرکز $C\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0\right)$ و با شعاع $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$ می توان در نظر گرفت که به دایره موهر موسوم است.

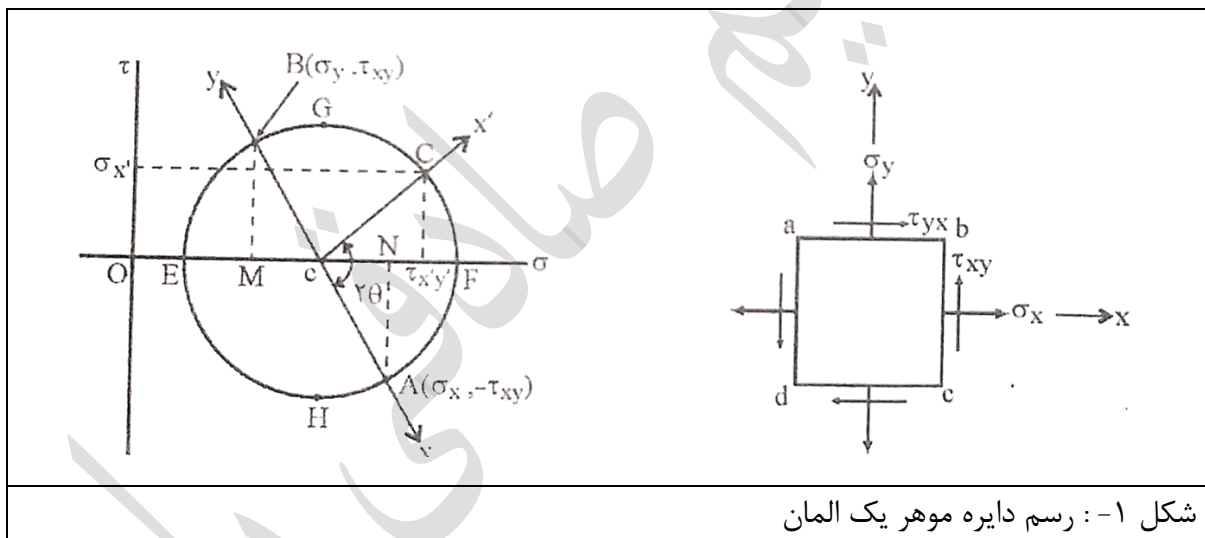


هر نقطه ای مانند P روی دایره موهر نشان دهنده صفحه ای است که از نقطه ای مانند M که تحت تنش می باشد می گذرد مختصات نقطه P تنش نرمال و تنش برشی در آن صفحه است، خطی که از مرکز دایره به نقطه P متصل می شود نشان دهنده خط عمود بر آن صفحه می باشد.

رسم دایره موهر :

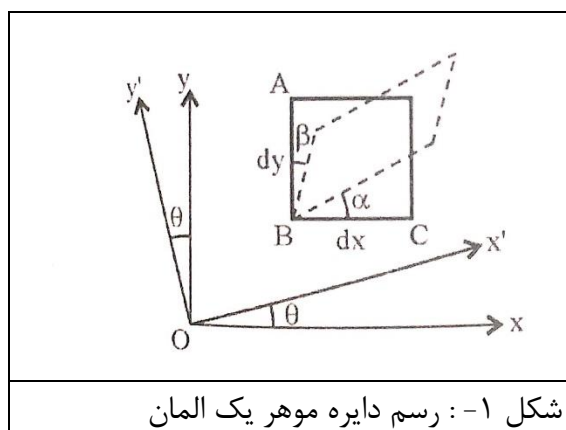
با داشتن تنش بر روی المان در یک نقطه می توان دایره موهر مربوط به آن نقطه را به ترتیب زیر رسم کرد:

- ۱- با تعیین محورهای x, y بر روی المان تنش σ_x, σ_y و τ_{xy} را در دو وجه عمود بر هم رسم کنید
- ۲- تنش های σ_x و σ_y در حالت کششی مثبت می باشند ، زمانی مثبت در نظر گرفته می شود که گشتاور آن حول یک نقطه داخل المان ساعت گرد باشد (علامت τ_{xy} در فرمول های قبلی مخالف علامت آن در دایره موهر است)
- ۳- دو محور عمود بر هم رسم کنید که محور افقی و قائم آن به ترتیب نمایش دهنده تنش نرمال (σ) و تنش برشی (τ) باشند
- ۴- تنش های نرمال و برشی را به صورت مختصات دو نقطه بر روی محور مختصات $\sigma - \tau$ مشخص کنید
- ۵- دایره ای به قطر پاره خطی که این دو نقطه را به هم متصل می کند رسم کنید ، بدین ترتیب دایره موهر بدست می آید



تبدیل کرنش:

همانند تبدیل تنش، منظور بدست آوردن رابطه بین کرنش های یک نقطه از صفحه در جهات مختلف آن می باشد



اگر ε_x ، ε_y و γ_{xy} مؤلفه های کرنش نرمال و برشی در یک نقطه در سیستم مختصات $x-y$ باشند آنگاه مؤلفه های کرنش در سیستم مختصات $x'-y'$ که با $x-y$ زاویه θ می سازد (پاد ساعت گرد مثبت است) بر حسب ε_x ، ε_y و γ_{xy} برابرند با:

$$\varepsilon_{x'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta$$

$$\varepsilon_{y'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta$$

$$\gamma_{x'y'} = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin 2\theta + \gamma_{xy} \cos 2\theta$$

کرنش های اصلی:

حداکثر و حداقل کرنش نرمال در یک نقطه را کرنش های اصلی و جهات مربوط به آنها را جهات اصلی می نامند و برابرند با:

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \frac{\gamma_{xy}^2}{4}}$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y}$$

کرنش برشی ماکزیمم:

مقدار کرنش برشی ماکزیمم به قرار زیر است

$$\gamma_{\max} = \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} = |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|$$

تانسور کرنش:

کمیت های $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ را می توان به صورت تانسوری زیر نیز نمایش داد که به تانسور کرنش موسوم است

$$[\epsilon] = \begin{pmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \epsilon_z \end{pmatrix}$$

و باز هم می توان مقادیر اصلی را با صفر قرار دادن دترمینان $[\epsilon - \lambda]$ بدست آورد.