

جلسه هفتم

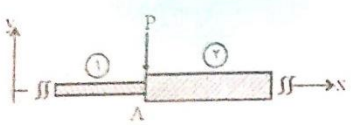
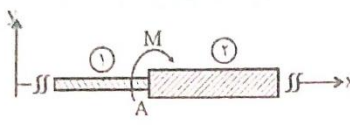
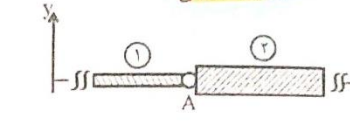
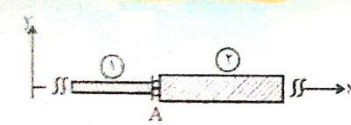
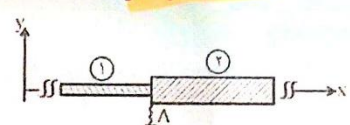
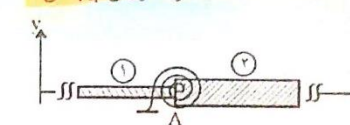
معادله $M = EIy''$ را معادله دیفرانسیل حاکم بر منحنی کشانی می نامند که یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم

می باشد. EI در آن صلابت خمش نام دارد. از طرفی $\frac{dy}{dx} = y'$ را شیب تیر می نامیم. و دلیل آن به شرح زیر است:

چون θ بسیار کوچک است پس $\tan \theta \approx \theta$ و نهایتاً $\theta = y'$ همان شیب تیر است.

شرایط پیوستگی:

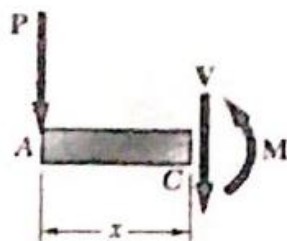
در صورتی که گشتاور خمش یا بارگذاری تیری در قطعات مختلف آن متفاوت باشد یعنی نتوان آن را با یک معادله برحسب x نمایش داد، یا تیراز قطعات با جنس و مقطع متفاوت باشد باید برای هر قسمت بطور جداگانه معادلات اصلی را برحسب y نوشت. در این حالت برای تعیین ثوابت انتگرالی معادلات باید در نقاط مشترک دو قسمت از شرایط پیوستگی نیز استفاده شود.

 $y_1 = y_2$ $y'_1 = y'_2$ $E_1 I_1 y''_1 = E_2 I_2 y''_2$ $E_1 I_1 y'''_1 - E_2 I_2 y'''_2 = P$	 $y_1 = y_2$ $y'_1 = y'_2$ $E_2 I_2 y''_2 - E_1 I_1 y''_1 = M$ $E_1 I_1 y'''_1 = E_2 I_2 y'''_2$	 $y_1 = y_2$ $y''_1 = y''_2 = 0$ $E_1 I_1 y'''_1 = E_2 I_2 y'''_2$
اتصال زنجیره‌ای (کشویی)  $y'_1 = y'_2$ $E_1 I_1 y''_1 = E_2 I_2 y''_2$ $y'''_1 = y'''_2 = 0$	اتصال به فنر خطی  $y_1 = y_2$ $y'_1 = y'_2$ $E_1 I_1 y''_1 = E_2 I_2 y''_2$ $E_1 I_1 y'''_1 - E_2 I_2 y'''_2 = ky_1(y_2 \text{ یا } y_1)$	اتصال فنر حلقه‌ای (پیچشی)  $y_1 = y_2$ $y'_1 = y'_2$ $E_1 I_1 y''_1 - E_2 I_2 y''_2 = ky'_1(y'_2 \text{ یا } y'_1)$ $E_1 I_1 y'''_1 = E_2 I_2 y'''_2$

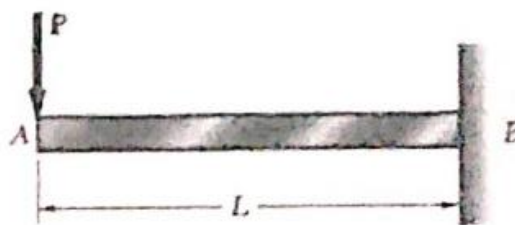
شکل ۲-۴: شرایط پیوستگی

مثال ۹.۹

بر انتهای آزاد A تیر یکسر گیردار AB با سطح مقطع یکنواخت، بار P وارد می‌شود (شکل ۹.۹). معادله منحنی کششی و تغییر مکان و شیب در نقطه A را معین کنید.



شکل ۱۰.۹



شکل ۹.۹

● حل :

با استفاده از نمودار جسم آزاد قسمت AC تیر (شکل ۱۰.۹)، که در آن C در فاصله x از انتهای A قرار دارد، به دست می‌آید

$$M = -Px \quad (۷.۹)$$

با جایگزینی M در معادله (۴.۹) و ضرب کردن هر دو طرف معادله در ثابت EI می‌نویسیم

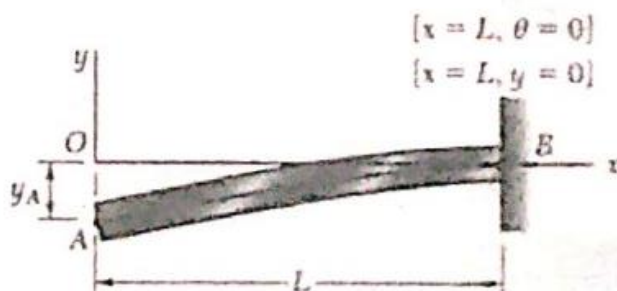
$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -Px$$

با گرفتن انتگرال بر حسب x به دست می‌آید

$$EI \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2} Px^2 + C_1 \quad (۸.۹)$$

حال مشاهده می‌کنیم که در انتهای گیردار (ثابت) B داریم $x = L$ و $\theta = dy/dx = 0$ (شکل ۱۱.۹). با قرار دادن این مقادیر در معادله (۸.۹) و حل آن بر حسب C_1 داریم

$$C_1 = \frac{1}{2} PL^2$$



شکل ۱۱.۹

که آن را در معادله (۹.۹) می‌گذاریم:

$$EI \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2} Px^2 + \frac{1}{2} PL^2 \quad (9.9)$$

با انتگرال‌گیری از دو طرف معادله (۹.۹)، می‌نویسیم

$$EI y = -\frac{1}{6} Px^3 + \frac{1}{2} PL^2 x + C_1 \quad (10.9)$$

ولی، در نقطه B داریم $x = L$ و $y = 0$ با قرار دادن این مقادیر در معادله (۱۰.۹)، داریم

$$0 = -\frac{1}{6} PL^3 + \frac{1}{2} PL^2 + C_1$$

$$C_1 = -\frac{1}{3} PL^2$$

با قرار دادن مقدار C_1 در معادله (۱۰.۹)، معادله منحنی کشسانی به دست می‌آید

$$EI y = -\frac{1}{6} Px^3 + \frac{1}{2} PL^2 x - \frac{1}{3} PL^2$$

یا

$$y = \frac{P}{6EI} (-x^3 + 3L^2 x - 2L^2) \quad (11.9)$$

با قرار دادن $x = 0$ در معادله‌های (۹.۹) و (۱۱.۹) تغییر مکان و شیب در A به دست می‌آید. داریم

$$y_A = -\frac{PL^2}{3EI} \quad \text{و} \quad \theta_A = \left(\frac{dy}{dx} \right)_A = \frac{PL^2}{2EI}$$