

جلسه اول

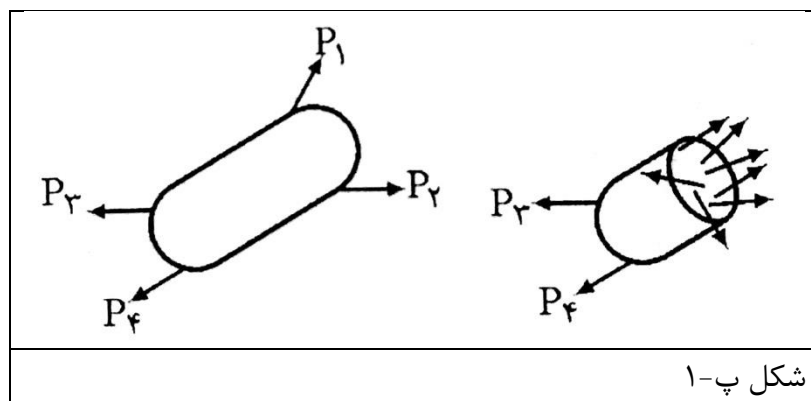
پیش نیاز

خلاصه ای از مقاومت مصالح ۱ و ۲:

مقاومت مصالح شاخه‌ای از علوم مهندسی می‌باشد که به بررسی رفتار اجسام جامد در مقابل بارگذاری‌های مختلف می‌پردازد این رفتار عمدتاً شامل تغییر شکل‌ها و عکس‌العمل‌های داخلی اجسام می‌باشد

تنش :

شدت نیروهای عکس‌العمل داخل جسم جامد به واحد سطح تنش نامیده می‌شود. به عبارت دیگر اگر جسمی تحت نیروهای خارجی قرار گیرد عکس‌العمل هر مقطع از جسم در مقابل نیروهای خارجی به صورت بار گسترده‌ای به روی سطح مقطع می‌باشد شدت این بار به واحد سطح در هر نقطه از سطح مقطع را تنش در آن نقطه از مقطع می‌باشد.



واحد تنش :

در SI واحد تنش نیوتن بر مترمربع $\frac{N}{m^2}$ یا پاسکال Pa می‌باشد

در سیستم انگلیسی واحد تنش بر حسب $\frac{lb}{in^2}$ پوند بر اینچ مربع تعریف شده است که با Psi نشان داده می‌شود و هر $1000 Psi$ ، $1 Ksi$ می‌باشد.

تنش عمودی :

تنش عمودی بر سطح را تنش عمودی نرمال یا محوری می‌نامند و با علامت σ (سیگما) نشان داده می‌شود.

تنش برشی :

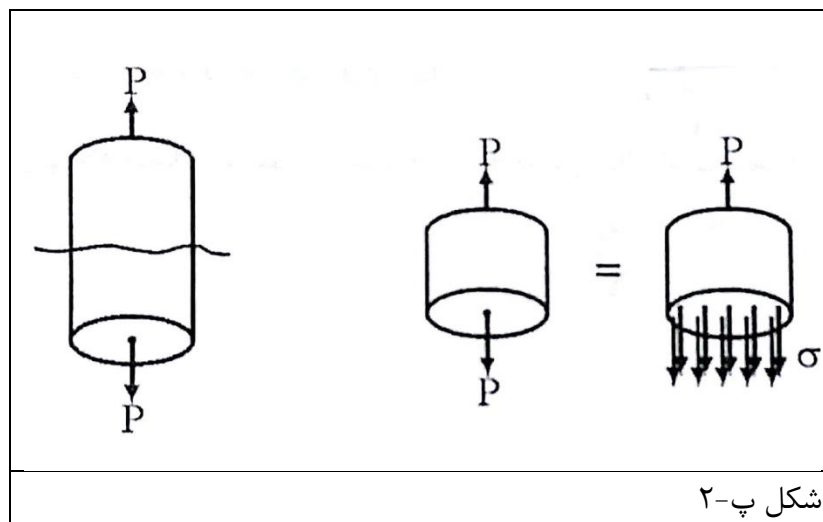
تنش مماس بر سطح را تنش برشی می نامند و با حرف τ مشخص می کنند

نیروی محوری :

به آینه نیروهای عمود بر سطح در یک مقطع نیروی محوری نامیده می شوند.

نکته : شرط لازم برای توزیع یکنواخت تنش محوری در مقطع ای از جنس واحد که تحت نیروی محوری P

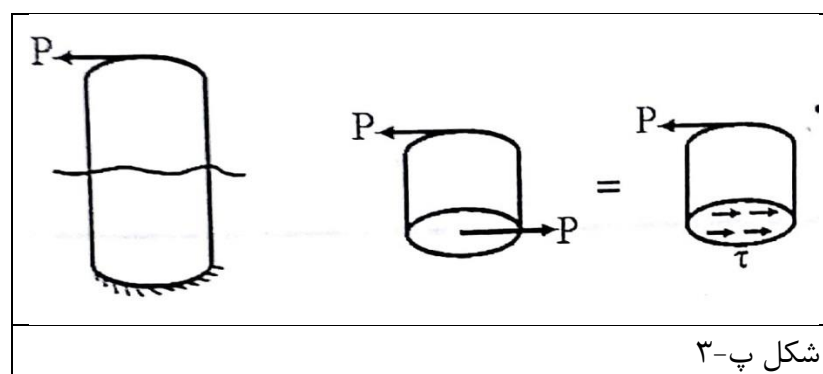
واحد شده است این است که نیرو از مرکز سطح مقطع عبور کند در این حالت تنش برابر است با $\sigma = \frac{P}{A}$



تنش برشی متوسط (میانگین) : اگر مقطعی به مساحت A تحت نیروی برشی P واقع شود تنش برشی

$$\tau = \frac{P}{A}$$

متوسط برابر است با :



کرنش و تغییر مکان

کرنش مهندسی:

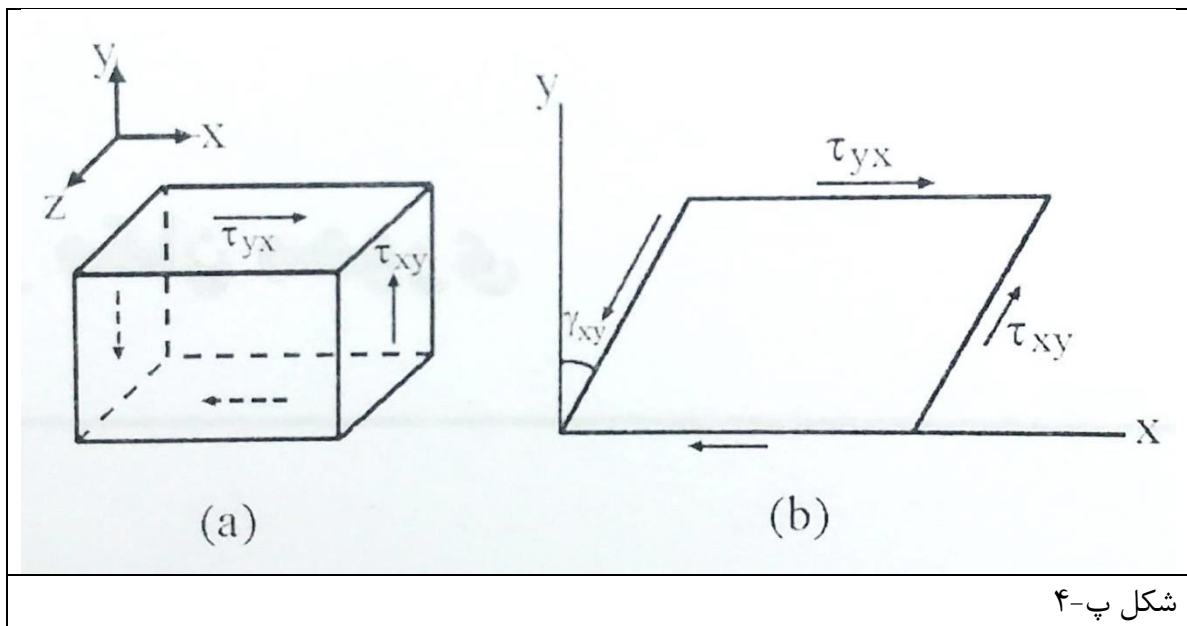
اگر فاصله دونقطه بر روی قطعه‌ای L_0 باشد و پس از بارگذاری این فاصله L شود کرنش مهندسی به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{\delta}{L_0}$$

وقتی که δ خیلی کوچک‌تر از L_0 باشد ($\delta \ll L_0$)

کرنش برشی:

تغییر شکل المانی مکعب شکل که تحت تنش برشی واقع شده است به صورت شکل زیر در نظر بگیرید :



برای تغییر شکل‌های کوچک γ_{xy} کرنش برشی در صفحه $x-y$ تعریف می‌شود و با واحد رادیان سنجیده می‌شود.

در صفحات $x-z$ و $y-z$ به ترتیب کرنش‌های برشی را با γ_{xz} و γ_{yz} نشان می‌دهند.

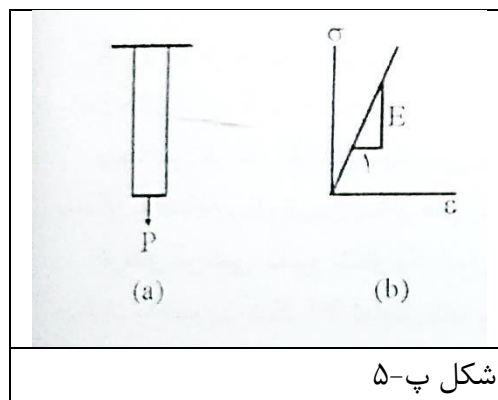
کرنش حرارتی:

اگر فاصله دونقطه از جسم L باشد با اعمال تغییر دما ΔT طول جسم به اندازه $\delta = \alpha L \Delta T$ تغییر خواهد کرد که در آن α ضریب انبساط حرارتی می باشد پس داریم:

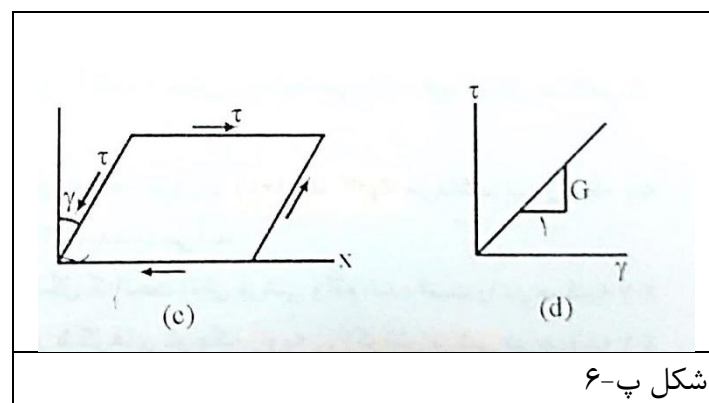
$$\varepsilon_T = \frac{\delta}{L} = \frac{\alpha L \Delta T}{L} \rightarrow \varepsilon_T = \alpha \Delta T$$

قانون هوک:

در تغییر مکان های کوچک رابطه تنش و کرنش اکثر مواد خطی می باشد و به صورت $\sigma = E \varepsilon$ تعریف می گردد یعنی تنش با ضریب E که مدول الاستیسیته نامیده می شود با کرنش متناسب است.

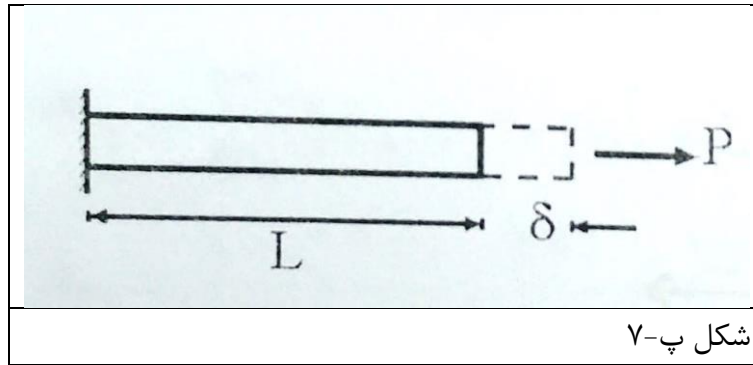


همچنین اگر المانی تحت کرنش قرار گیرد رابطه ی بین تنش برشی با کرنش برشی به صورت $\tau = G \gamma$ می باشد که در آن G مدول برشی است.



تغییر مکان محوری:

میله ای با سطح A که تحت بار P قرار دارد در نظر بگیرید داریم:

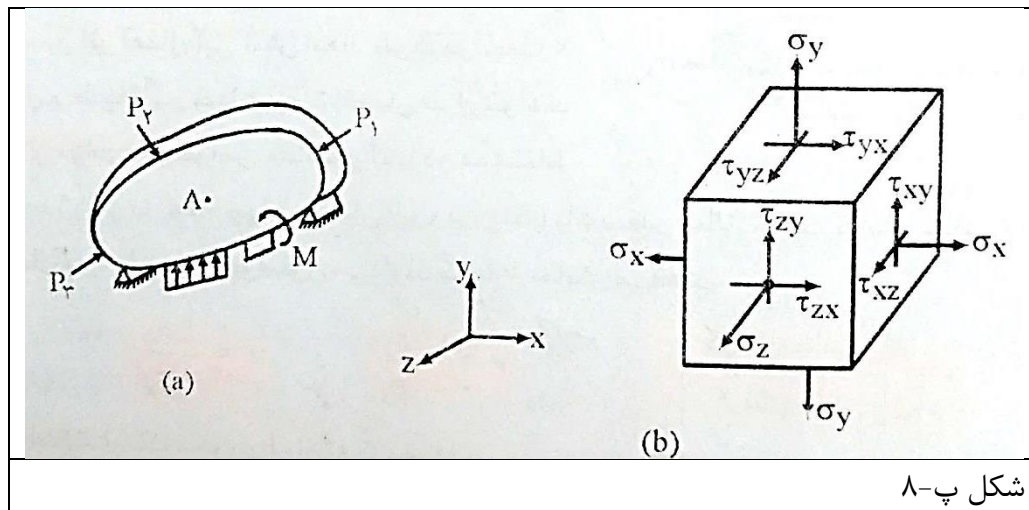


$$\sigma = E \varepsilon \rightarrow \frac{P}{A} = E \frac{\delta}{L} \rightarrow \delta = \frac{PL}{AE} = \frac{\sigma L}{E}$$

تانسور تنش:

در شکل نشان داده شده، تنش های عمودی با $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ مشخص شده اند، در تنش برشی τ_{ij} ، اندیس i نشان محور عمود بر صفحه است و اندیس j جهت تنش در صفحه را معین می کند و داریم

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}$$

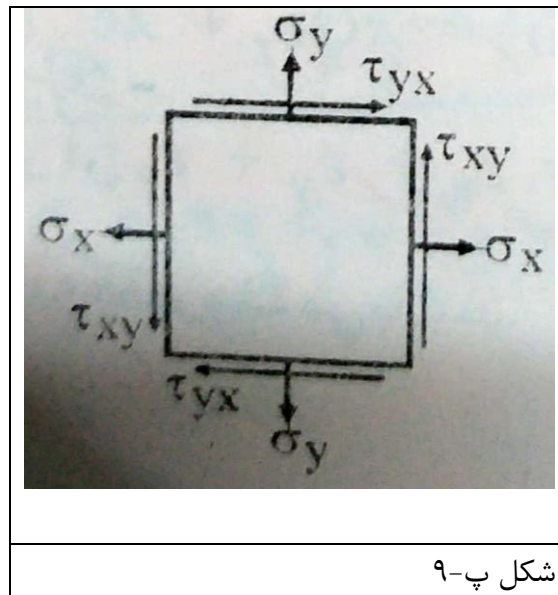


تنش های وارد بر یک المان را می توان به صورت ماتریس زیر نمایش داد که به آن تانسور تنش می گویند

جهت نرمال
→

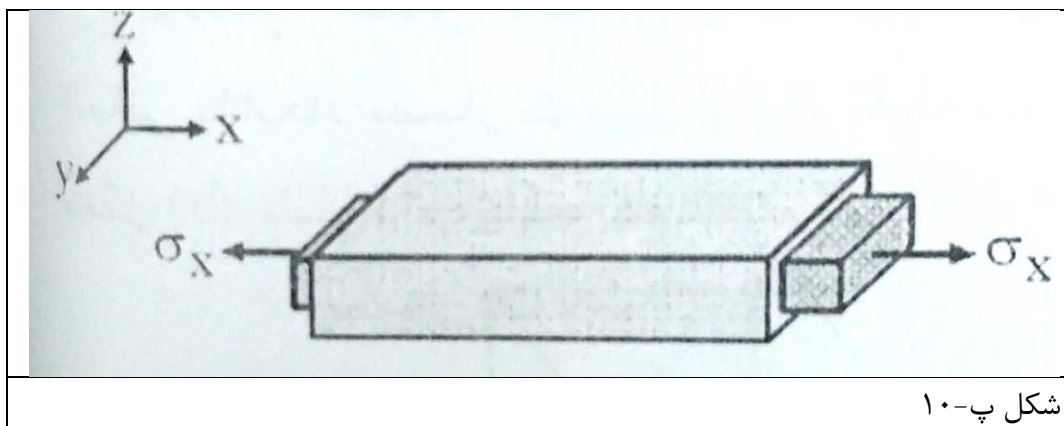
$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad \downarrow \text{جهت تنش}$$

در حالت دوبعدی در صفحه $x - y$ داریم:



$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}, \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$$

ضریب پواسون (ν):



$$\nu = \left| \frac{korneshe - janebi}{korneshe - tooli} \right|, \nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \rightarrow \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$$

پیچش

پیچش در اجسام هنگامی رخ می‌دهد که تحت اثر گشتاور در امتداد محورشان قرار داشته باشند در اثر پیچش تنش و تغییر شکل در اجسام به وجود می‌آید که بستگی به شکل مقطع دارد و تنش آن از نوع برشی است.

پیچش مقاطع دایروی:

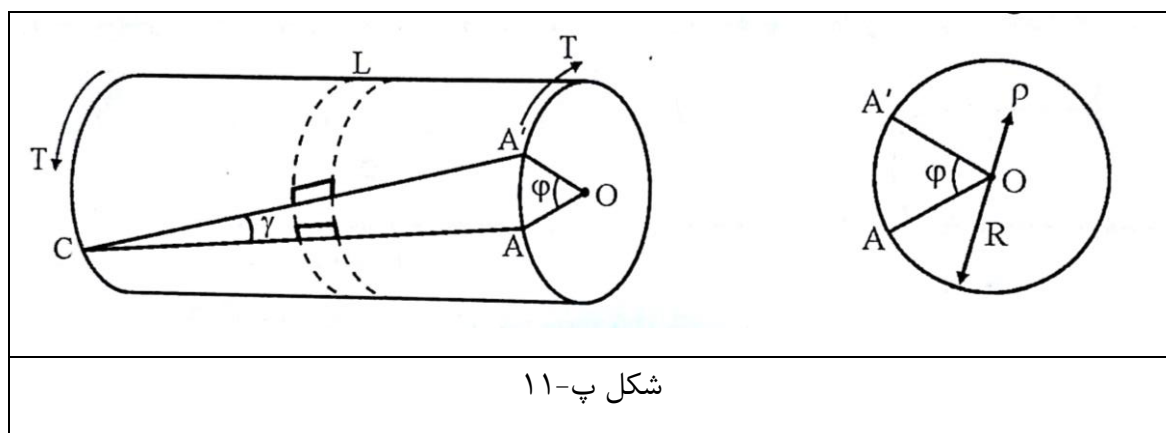
با در نظر گرفتن فرضیات زیر:

۱- مقاطع دایروی عمود بر محور میله پس از اعمال پیچش مسطح و عمود بر محور میله باقی می‌ماند.

۲- کرنش برشی از محور مرکزی میله به‌طور خطی تغییر می‌کند.

۳- برای حالت الاستیک رابطه‌ی تنش و کرنش از قانون هوک پیروی کند.

شکل زیر را در نظر بگیرید که در اثر اعمال گشتاور پیچشی T به میله، نقطه‌ی A و A' تغییر مکان پیدا می‌کند و مقطع به‌اندازه‌ی ϕ دوران می‌کند.



برای گشتاور T تنش برشی در مقطع ایجاد می‌شود. که مقدار آن در هر نقطه به فاصله‌ی آن از مرکز دایره، گشتاور پیچشی و ممان قطبی وابسته است. پس برای نقطه D داریم:

که مقدار J برای دایره برابر است با:

$$J = \frac{1}{2} \pi R^4 = \frac{1}{32} \pi D^4$$

می‌باشد و برای مقطع سوراخ‌دار با شعاع داخلی R_1 و شعاع خارجی R_2 مقدار J برابر است با:

$$J = \frac{1}{2} \pi (R_2^4 - R_1^4) = \frac{1}{32} \pi (D_2^4 - D_1^4)$$

بیشترین مقدار تنش برش روی محیط دایره اتفاق می‌افتد و داریم $R = \rho$ بنابراین:

$$\tau_{\max} = \frac{TR}{J} = \frac{2T}{\pi R^3} = \frac{16T}{\pi D^3}$$

تنش خمشی

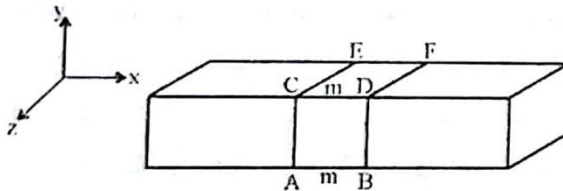
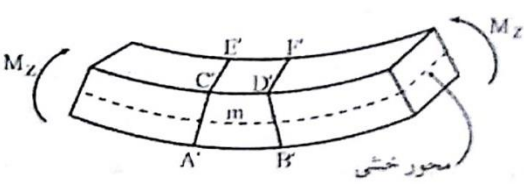
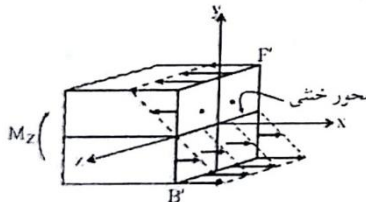
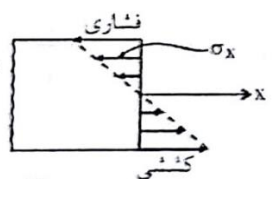
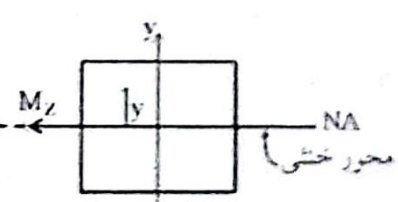
تیری مانند شکل ۴-۱-الف در نظر بگیرید که تحت گشتاور خمشی M واقع شده است. پس از اعمال خمش

M تیر به شکل (ب) درخواهد آمد. همان‌طور که واضح است پس از اعمال گشتاور M طول CD کاهش

می‌ابد و طول AB افزایش پیدا می‌کند. بنابراین تنش در قسمت بالایی تیر فشاری و در قسمت پایینی آن

کششی می‌باشد. با توجه به این نکته می‌توان نتیجه گرفت که در هر مقطع تیر نقاطی وجود دارند که تنش

در آن‌ها صفر است. خطی که این نقاط را به هم متصل می‌سازد محور خنثی نامیده می‌شود. و از مرکز سطح عبور می‌کند.

		
شکل الف	شکل ب	
		
شکل ج	شکل د	شکل ه
شکل پ-۱۲		

تنش به وجود آمده در اثر اعمال گشتاور تنش خمشی نامیده می‌شود و از نوع تنش محوری می‌باشد.

برای فرموله کردن تنش خمشی فرضیات زیر را در نظر بگیرید.

۱- مقاطع عمود به محور تیر بعد از اعمال خمش همچنان بدون تغییر و عمود به محور تیر باقی می‌مانند.

۲- برای حالت الاستیک رابطه‌ی بین تنش و کرنش از قانون هوک پیروی می‌کند.

۳- مدول الاستیسیته در کلیه‌ی تارهای تیر ثابت و مقدار آن در کشش و فشار یکسان است.

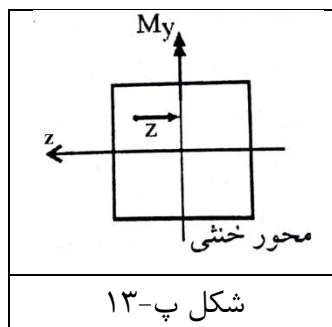
با در نظر گرفتن فرضیات بالا برای هر نقطه به فاصله‌ی y از تار خنثی تنش خمشی از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$\sigma_x = \frac{M_z y}{I_z}$$

که در آن σ_x تنش محوری عمود بر مقطع در راستای X است و M_z و I_z به ترتیب گشتاور خمشی و ممان اینرسی مقطع حول محور Z می باشد.

در صورتی که گشتاور خمشی حول محور Y به مقطع وارد شود تنش خمشی برابر است با:

$$\sigma_x = \frac{M_y z}{I_y}$$



بر اساس روابط فوق تنش ماکزیمم در نقاطی رخ می دهد که بیشترین فاصله از تار خنثی را داشته باشند.

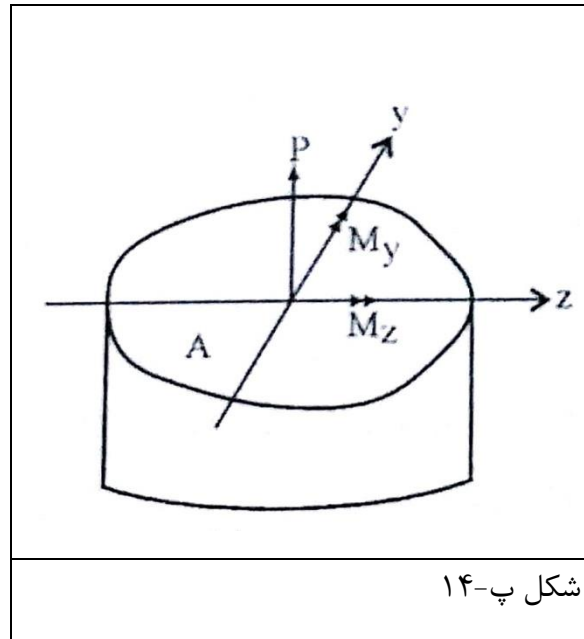
اگر فاصله ی این نقاط را با C نشان دهیم مقاومت خمشی مقطع که با S نشان داده می شود به شکل زیر محاسبه می شود.

$$S = \frac{I}{C}$$

خمش توأم با نیروی محوری:

مقطع را مطابق شکل نظر بگیرید که تحت گشتاورهای M_y و M_z و نیروی محوری P قرار دارد. در این حالت تنش در نقطه ی دلخواه A روی سطح مقطع و به فاصله ی Z و Y از محورهای مختصات به شکل زیر می باشد.

$$\sigma_A = \pm \frac{M_z y}{I_z} \pm \frac{M_y z}{I_y} \pm \frac{P}{A}$$



شکل پ-۱۴

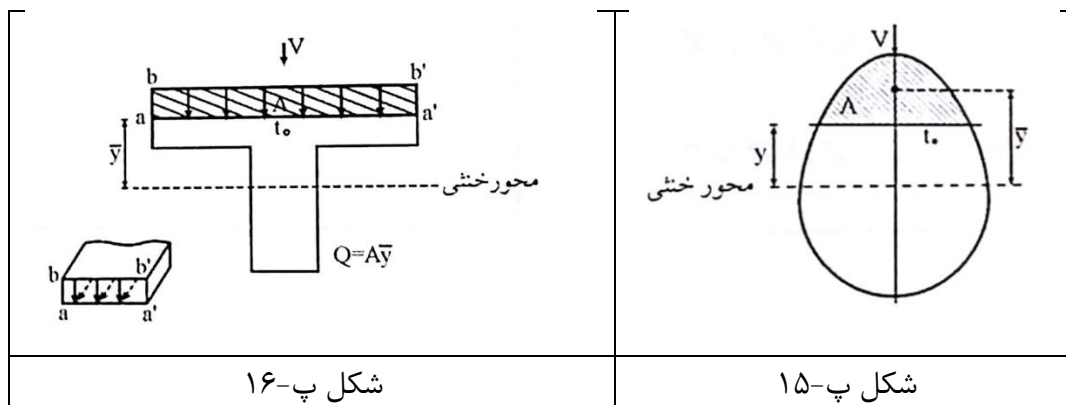
تنش برشی در تیرها

همانطور که در فصل ۱ توضیح داده شد، تنش برشی میانگین در تیرها برابر است با $\tau_{ave} = \frac{P}{A}$ که در آن توزیع تنش در مقطع تیر است یکسان فرض شده است در حقیقت تنش برشی در نقاط مختلف مقطع متفاوت است و داریم:

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

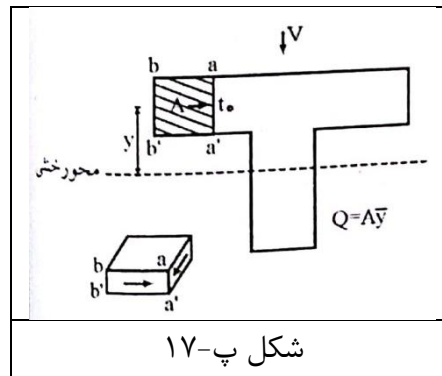
که در آن $Q = \bar{y}A$ و $\bar{y}$ فاصله مرکز سطح A از تار خنثی می باشد.

در شکل های زیر مقادیر A و $\bar{y}$ نشان داده شده است.



شکل پ-۱۶

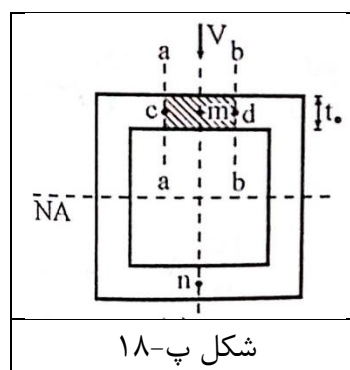
شکل پ-۱۵



عبارت $\frac{VQ}{I}$ را با q نشان می دهند که شدت نیروی برشی بر واحد طول را نشان می دهد و جریان برش نام دارد.

در فرمول $\tau = \frac{VQ}{It}$ ، I همان اینرسی کل مقطع نسبت به محور خنثی است و t طول برش در مقطع است ضمناً برش باید جوری زده شود که مقطع را به دو قسمت مجزا تقسیم کند.

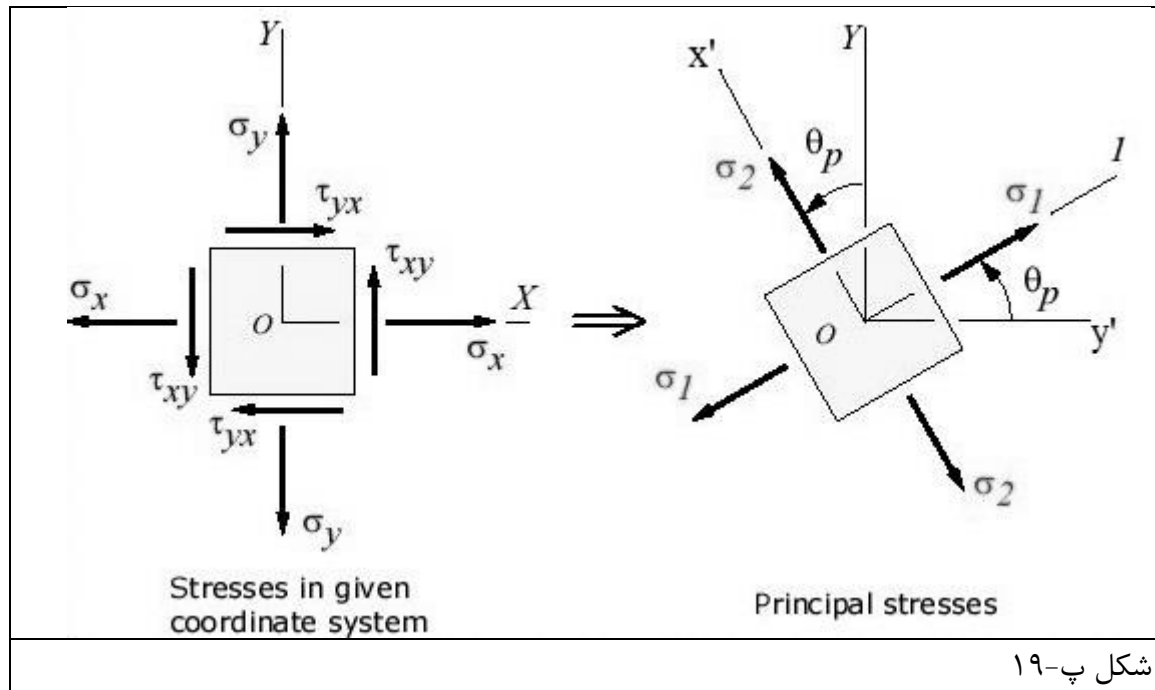
به عنوان مثال در شکل زیر برای به دست آوردن تنش برشی در نقطه C با برش $a-a$ مقطع به دو قسمت مجزا تقسیم نمیشود بنابراین باید برشی در نقطه d ، قرینه C نسبت به محور تقارن برش زده شود تا مقطع به دو قسمت مجزا تقسیم شود بنابراین t در فرمول با $2t_0$ جایگزین خواهد شد.



- اگر مقطعی دارای محور تقارن باشد و نیروی برشی در امتداد این محور به مقطع وارد شود تنش برشی یا جریان برشی در نقاطی که توسط محور تقارن برش زده می شود برابر صفر است.

تبدیل تنش:

در حالت دو بعدی در صفحه $X - Y$ جهاتی را که در آن تنش σ'_x و σ'_y ماکزیمم یا مینیموم گردد، جهات اصلی تنس نامیده می شوند و مقادیر تنش در آن جهات را تنش های اصلی σ_1 و σ_2 می نامند که با فرمول زیر محاسبه می شوند:



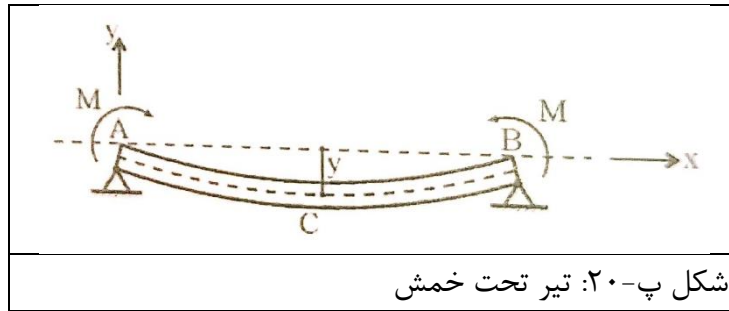
$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

در سایر صفحات کفایت تنش های مربوط به همان صفحه ها را جایگذاری کنیم.

تغییر مکان تیرها

تیر مستقیمی را در نظر بگیرید که مانند شکل تحت گشتاور خمشی قرار گرفته است. در اثر این خمش تیر دچار انحنا می گردد و تغییر مکان می دهد. تغییر مکان تیر عبارت است از جابجایی محور مرکزی تیر در جهت عمود

وضعیت اولیه آن که در شکل با y نشان داده شده است از و جابجایی نقطه C از تیر $A-B$ را نشان می دهد.



برای به دست آوردن تغییر مکان تیرها ابتدا معادله ی تغییر مکان تیر را به دست می آوریم، با یادآوری فرمول انحنا برای تیرها داریم:

$$\frac{1}{R} = \frac{M(X)}{EI}$$

که در آن R شعاع انحنا، $M(x)$ ممان در هر نقطه، E مدول الاستیسیته و I ممان انیرسی مقطع می باشند.

از طرفی فرمول انحنا تابعی مانند y به صورت زیر است:

$$\frac{1}{R} = \frac{Y''}{(1 + (Y')^2)^{\frac{3}{2}}}$$

با برابر قرار دادن دو رابطه بالا و صرف نظر از توان دوم y' (شیب تیر) نسبت به عدد یک به علت کوچک بودن آن داریم:

$$M(x) = EIy''$$

برای تیر با بار گسترده $w(x)$ بر واحد طول آن با نیروی برشی $V(x)$ داریم:

$$\frac{dV(x)}{dx} = -w(x)$$

و از رابطه بین گشتاور خمشی و نیروی برشی داریم:

$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x)$$

(روابط بالا از استاتیک آورده شده اند)

از رابطه $M(x) = EIy''$ با جایگزینی مقدار $M(x)$ داریم:

$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x) \rightarrow \frac{d}{dx}(E I y'') = V(x)$$

$$\frac{dV(x)}{dx} = -W(x) \rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(E I y'')\right) = -w(x)$$

$$\rightarrow \frac{d^2}{dx^2}(E I y'') = -w(x)$$

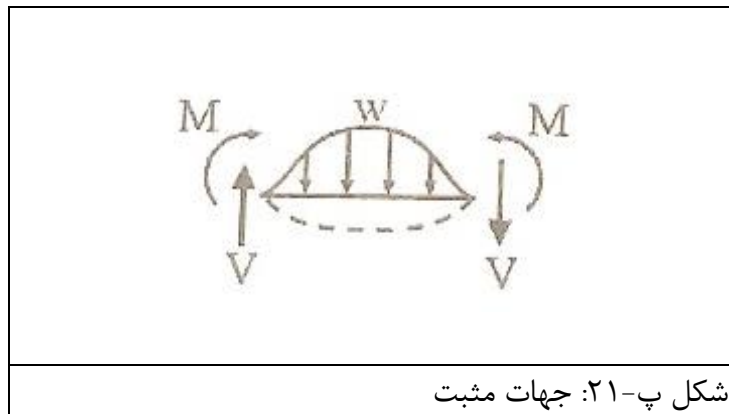
در معادلات بالا در صورتی E و I در طول تیر ثابت باشند (جنس و مقطع) داریم:

$$EI \frac{d}{dx} y'' = V(x) \rightarrow EI y'' = V(x)$$

$$EI \frac{d^2}{dx^2} y'' = -w(x) \rightarrow EI y^{(4)} = -w(x)$$

معادلات بالا عموماً جهت تعیین تغییر مکان تیرها استفاده می شود.

در معادلات گفته شده محورهای مختصات، گشتاورهای خمشی و بارهای گسترده ی مثبت به صورت شکل زیر در نظر گرفته می شود و فرضیات گفته شده برای فرموله کردن تنش خمشی در اینجا نیز صادق است.

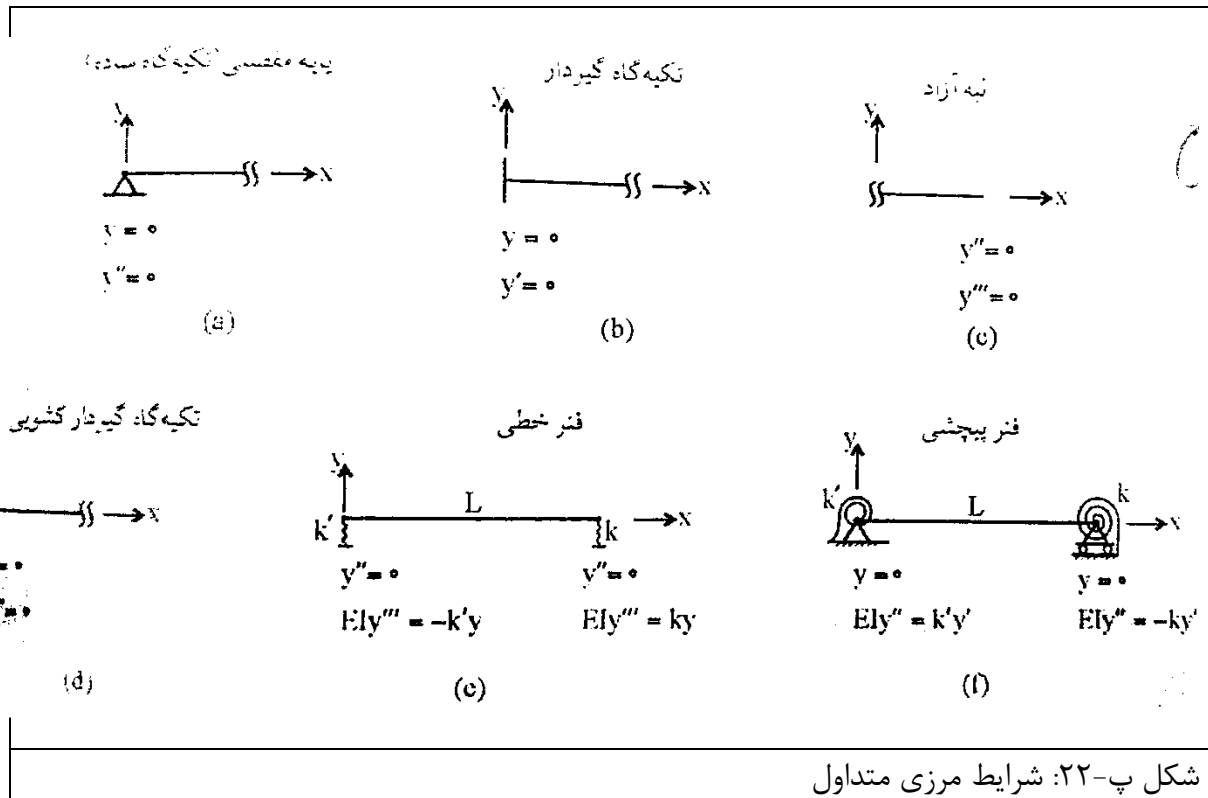


شکل پ-۲۱: جهات مثبت

شرایط مرزی:

پس از انتگرال گیری در روابط گفته شده ثوابت انتگرالی در معادله ظاهر می شود که باید با استفاده از شرایط فردی تیر تعیین گردد.

در شکل های زیر شرایط مرزی متداول نشان داده شده اند:

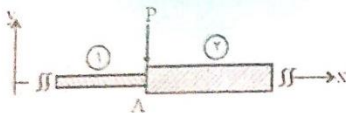
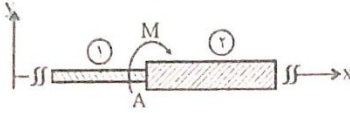
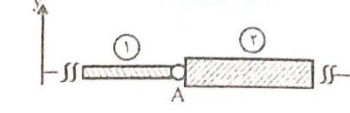
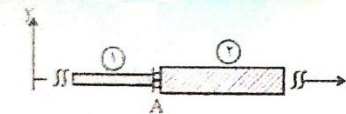
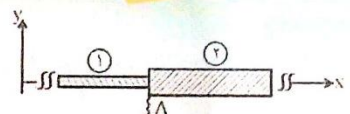
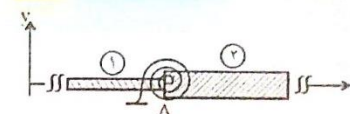


معادله $EI = \frac{d^2y}{dx^2}$ را معادله دیفرانسیل حاکم بر منحنی کشانی می نامند که یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم می باشد. EI در آن صلابت خمش نام دارد. از طرفی $\dot{y}$ را شیب تیر می نامیم. و دلیل آن به شرح زیر است:

چون θ بسیار کوچک است پس $\tan\theta \simeq \theta$ و نهایتاً $\theta = \dot{y}$ همان شیب تیر است.

شرایط پیوستگی:

در صورتی که گشتاور خمش یا بارگذاری تیری در قطعات مختلف آن متفاوت باشد یعنی نتوان آن را با یک معادله برحسب x نمایش داد، یا تیراز قطعات با جنس و مقطع متفاوت باشد باید برای هر قسمت بطور جداگانه معادلات اصلی را برحسب y نوشت. در این حالت برای تعیین ثوابت انتگرالی معادلات باید در نقاط مشترک دو قسمت از شرایط پیوستگی نیز استفاده شود.

		
$y_1 = y_2$ $y'_1 = y'_2$ $E_1 I_1 y''_1 = E_2 I_2 y''_2$ $E_1 I_1 y'''_1 - E_2 I_2 y'''_2 = P$	$y_1 = y_2$ $y'_1 = y'_2$ $E_2 I_2 y''_2 - E_1 I_1 y''_1 = M$ $E_1 I_1 y'''_1 = E_2 I_2 y'''_2$	$y_1 = y_2$ $y''_1 = y''_2 = 0$ $E_1 I_1 y'''_1 = E_2 I_2 y'''_2$
اتصال زنجیره‌ای (کشویی)	اتصال به فنر خطی	اتصال فنر حلزونی (پیچشی)
		
$y'_1 = y'_2$ $E_1 I_1 y''_1 = E_2 I_2 y''_2$ $y'''_1 = y'''_2 = 0$	$y_1 = y_2$ $y'_1 = y'_2$ $E_1 I_1 y''_1 = E_2 I_2 y''_2$ $E_1 I_1 y'''_1 - E_2 I_2 y'''_2 = k y_1 (y_2 \text{ یا})$	$y_1 = y_2$ $y'_1 = y'_2$ $E_1 I_1 y''_1 - E_2 I_2 y''_2 = k y'_1 (y'_2 \text{ یا})$ $E_1 I_1 y'''_1 = E_2 I_2 y'''_2$

شکل پ-۲۳: شرایط پیوستگی

روش انرژی

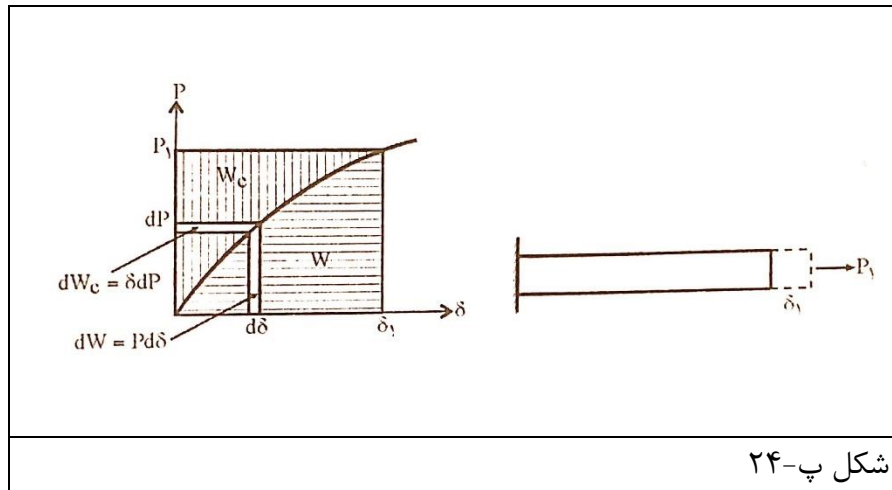
در اثر اعمال عوامل خارجی بر روی جسم و تغییر شکل آن توسط عواملی چون نیرو و یا گشتاور و ایجاد تغییر مکان یا دوران نقاط تحت اثر نیرو و گشتاور خارجی، بر روی جسم کار انجام می شود.

اگر جسم از ماده الاستیک ساخته شده باشد و کار انجام شده روی آن منجر به تغییر شکل گردد، این کار بصورت انرژی داخلی که انرژی کرنشی نامیده می شود در آن ذخیره می گردد و داریم:

$$U = W$$

که در آن U انرژی داخلی ذخیره شده و W کار انجام شده می باشد.

میله زیر را در نظر بگیرید که در اثر اعمال نیروی P نهایتاً به اندازه δ_1 تغییر مکان می دهد. کار انجام شده یا به عبارتی انرژی ذخیره شده در میله عبارت است از:



$$W = \int_0^{\delta_1} P d\delta$$

که برابر است با سطح زیر منحنی $P - \delta$ (نیرو - تغییر مکان) در فاصله 0 تا δ_1 .

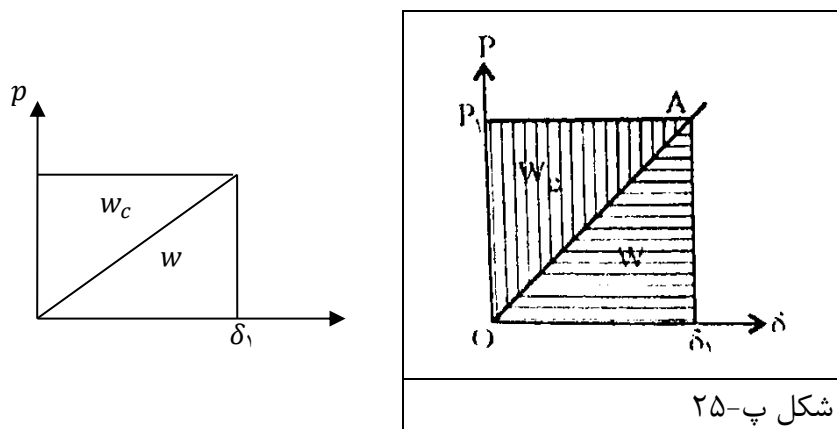
نوع دیگری از کار که کار متمم نامیده می شود بنابر تعریف برابر است با:

$$W_C = \int_0^{P_1} \delta dP$$

که برابر است با سطح محصور منحنی نیرو- تغییر مکان در فاصله 0 تا P_1 .

در صورتی که رابطه بین نیرو و تغییر مکان خطی باشد مقدار کار و کار متمم برابرند یعنی :

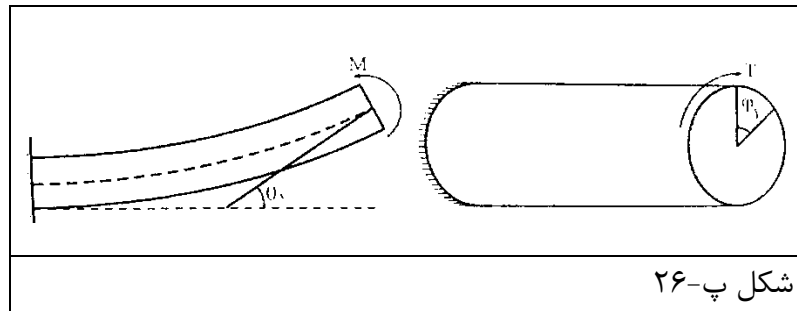
$$W = W_C = \frac{1}{2} P_1 \delta_1$$



به همین صورت برای میله های تحت پیچش و گشتاور خمشی کار انجام شده به شکل زیر محاسبه می گردد.

$$W = \int_0^{\phi_1} T d\phi$$

$$W = \int_0^{\theta_1} M d\theta$$



چگالی انرژی کرنشی

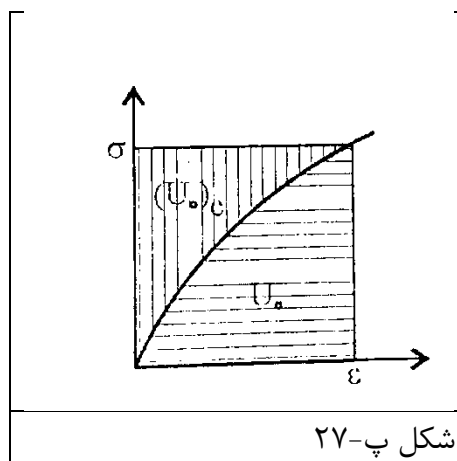
انرژی کرنشی بر واحد حجم را چگالی انرژی کرنشی می نامند و با تقسیم بر حجم ($V=AL$) و دانستن

$$\sigma = \frac{P}{A} \text{ و } d\varepsilon = \frac{d\delta}{L} \text{ برای چگالی انرژی کرنشی } U_0 \text{ داریم.}$$

$$U_0 = \int_0^{\varepsilon_1} \sigma d\varepsilon$$

به همین ترتیب چگالی انرژی متمم برابر است با :

$$(U_0)_C = \int_0^{\sigma_1} \varepsilon d\sigma$$



در حالتی که رابطه تنش و کرنش خطی باشد چگالی انرژی کرنشی و چگالی انرژی متمم با هم برابر و مساوی با $\frac{1}{2}\sigma\epsilon$ هستند.

اگر ماده از قانون هوک پیروی کند ($\sigma = E\epsilon$) یعنی داریم:

$$U_0 = \int_0^\epsilon \sigma d\epsilon = \int_0^\epsilon E\epsilon d\epsilon = \frac{1}{2}E\epsilon^2 = \frac{\sigma^2}{2E}$$

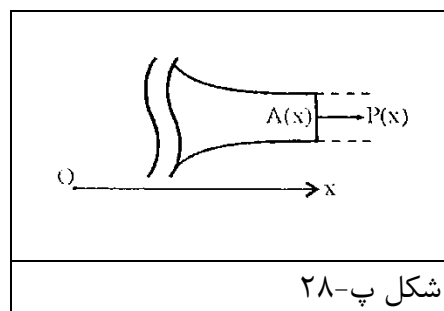
بنابراین انرژی کرنشی جسمی که تحت تنش محوری σ_X در جهت X قرار داشته باشد برابر است با :

$$U = \int_V U_0 dV = \int_V \frac{\sigma_x^2}{2E} dV = \int_V \frac{E\epsilon_x^2}{2} dV$$

انرژی کرنشی میله تحت نیروی محوری

در صورتی که میله ای به طول L تحت نیروی $P(X)$ در فاصله X از مبدا با سطح مقطع $A(X)$ قرار داشته باشد داریم:

$$U = \int_0^L \frac{P^2(x)}{2EA(x)} dx$$



برای میله به طول L با بار ثابت P و سطح مقطع ثابت A داریم :

$$U = \frac{P^2 L}{2AE}$$

قضیه کاستیگلیانو

برای بدست آوردن تغییر مکان سازه های خطی می توان مشتق انرژی کرنشی را نسبت به نیروی دلخواه P_i محاسبه نمود یعنی:

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i}$$

اگر δ_i مثبت باشد تغییر مکان در جهت نیروست و بالعکس.

و دوران سازه در نقطه اعمال گشتاور M_i برابر است با :

$$\theta_i = \frac{\partial U}{\partial M_i}$$

تغییر مکان خرپاها

اگر خرپایی از n میله تشکیل شده باشد داریم:

$$U = \sum_{j=1}^n \frac{F_j^2 L_j}{2A_j E_j}$$

بنابر قضیه کاستیگلیانو تغییر مکان در محل اعمال بار p_i برابر است با :

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} = \sum_{j=1}^n \frac{F_j L_j}{A_j E_j} \frac{\partial F_j}{\partial P_i}$$

که در آن F_j نیروی محوری میله j ام می باشد.