

جلسه دهم

گرادیان توابع میدانی

بر اساس دیدگاه محیط های پیوسته و مقاومت مصالح ۳، زمانی یک توزیع پیوسته از جرم و حجم داریم به طوری که می توان آن جسم را متشکل از بیشمار ذره در کنار هم و بدون هیچگونه فضای خالی در نظر گرفت. وجه تمایز بین ذرات را با بردار مکان آنها مشخص می کنیم برای هر ذره یک متغیر فیزیکی اعم از اسکالر برداری و تانسوری قابل تعریف است.

این متغیرهای فیزیکی را برای ذرات یک جسم از طریق توابع پیوسته بر حسب بردار مکان آنها تعریف می کنیم.

به این نوع توابع که آرگومان یا ورودی آنها یک بردار که در اینجا بردار مکان ذره باشند، اصطلاحاً توابع میدانی (*Field – Functions*) گفته می شود.

در این بخش هدف بر این است که به گرادیان توابع میدانی اعم از اسکالری برداری و تانسوری پرداخته شود.

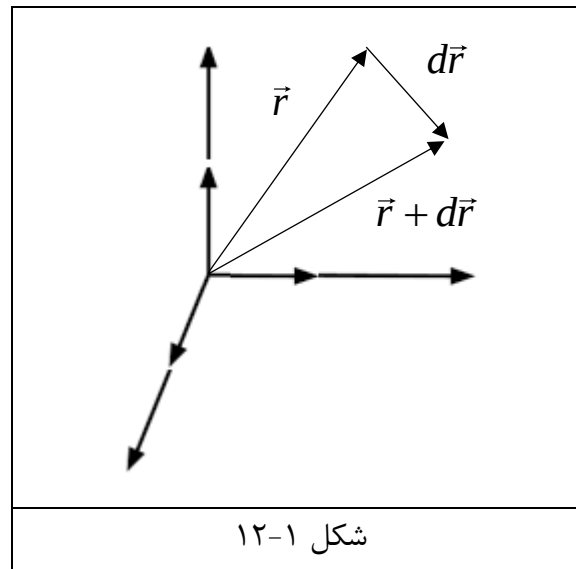
۱- گرادیان توابع میدانی از نوع اسکالر

برای مثال متغیرهای فیزیکی همچون دما، چگالی حجمی یا چگالی انرژی کرنشی برای ذرات یک جسم پیوسته از طریق تابع میدانی زیر قابل تعریف است:

$$\phi = \phi(\vec{r}) \text{ می باشد: } r \text{ برای ذره}$$

حال به اختلاف ϕ دو ذره همجوار مانند $\vec{r}$ و $\vec{r} + d\vec{r}$ در دستگاه مختصات کارتزین می پردازیم:

$$\begin{aligned} d\phi &= \phi(\vec{r} + d\vec{r}) - \phi(\vec{r}) = \phi(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3) - \phi(x_1, x_2, x_3) \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x_3} dx_3 \\ &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \vec{e}_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \vec{e}_3 \right) \cdot (dx_1 \vec{e}_1 + dx_2 \vec{e}_2 + dx_3 \vec{e}_3) \\ &= d\phi = \nabla \phi \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$



به $\nabla \phi$ گرادیان تابع اسکالر ϕ در دستگاه مختصات کارتزین می گویند.

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \vec{e}_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \vec{e}_3 = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \vec{e}_i = \phi_{,i} \vec{e}_i$$

عملگر ∇ به صورت زیر قابل تعریف است:

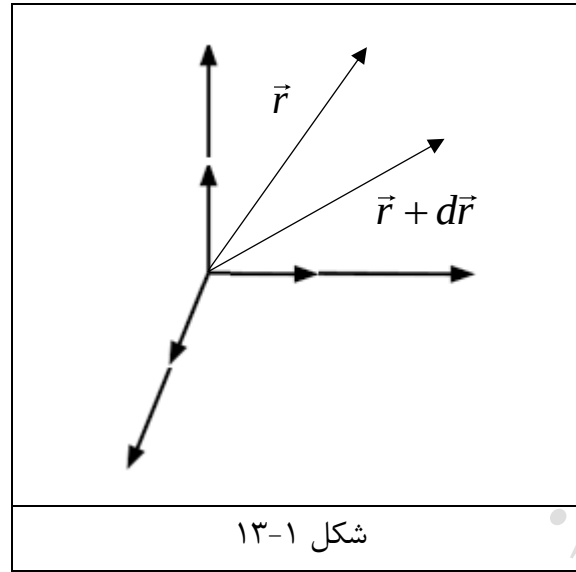
$$\nabla () = \frac{\partial ()}{\partial x_i} \vec{e}_i$$

نکته

بیشترین اختلاف دما مربوط به دو ذره است که در جهت $\nabla \phi$ قرار گرفته اند و کمترین اختلاف دما مربوط به دو ذره ای که در جهت عمود بر $\nabla \phi$ قرار گرفته اند.

۲- گرادیان توابع میدانی از نوع بردار

متغیرهای فیزیکی همچون سرعت و شتاب برداری ذرات یک جسم به صورت نمادین زیر قابل نمایش هستند



$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$ به سرعت ذره $\vec{r}$ اشاره دارد

$\vec{a} = \vec{a}(\vec{r})$ به شتاب ذره $\vec{r}$ اشاره دارد

اختلاف سرعت دو ذره همجوار

$$\vec{v}(\vec{r}) = v_i(\vec{r})\vec{e}_i$$

$$d\vec{v} = \vec{v}(\vec{r} + d\vec{r}) - \vec{v}(\vec{r}) = v_i(\vec{r} + d\vec{r})\vec{e}_i - v_i(\vec{r})\vec{e}_i$$

$$= (v_i(\vec{r} + d\vec{r}) - v_i(\vec{r}))\vec{e}_i \rightarrow d\vec{v} = (\nabla v_i \cdot d\vec{r})\vec{e}_i = (\vec{e}_i \otimes \nabla v_i) d\vec{r} = (\nabla \vec{v}) d\vec{r}$$

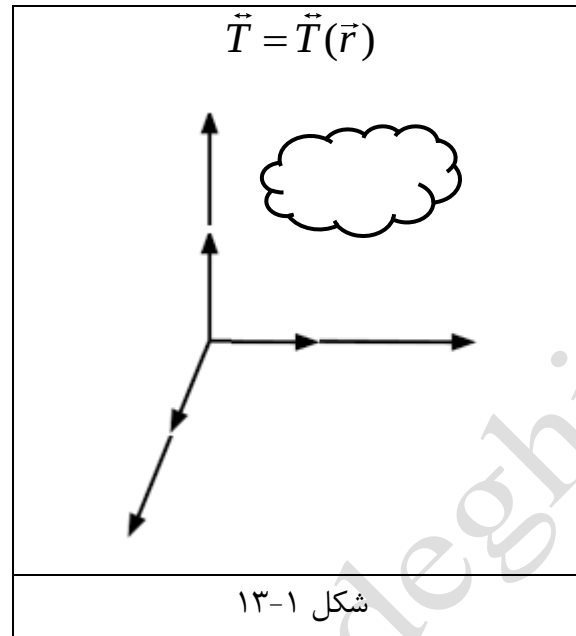
$$\nabla \vec{v} = \vec{e}_i \otimes \nabla v_i = \vec{e}_i \otimes \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \vec{e}_j = \vec{e}_i \otimes v_{i,j} \vec{e}_j = v_{i,j} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$$

$$[\nabla \vec{v}]_{\{\vec{e}_i\}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{components of } -\nabla v_1 \\ \text{components of } -\nabla v_2 \\ \text{components of } -\nabla v_3 \end{bmatrix}$$

$$|d\vec{r}| = \sqrt{(dr_1)^2 + (dr_2)^2 + (dr_3)^2} = \left[(\nabla v_1 \cdot d\vec{r})^2 + (\nabla v_2 \cdot d\vec{r})^2 + (\nabla v_3 \cdot d\vec{r})^2 \right]$$

۳- گرادیان توابع میدانی از نوع تانسور

متغیرهای فیزیکی همچون تانسور تنش یا کرنش برای ذرات یک جسم پیوسته به شکل زیر قابل ارائه می باشد



اختلاف تانسور تنش برای دو ذره همجوار به شکل زیر است:

$$\vec{T}(\vec{r}) = T_{ij}(\vec{r}) \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$$

$$\begin{aligned} d\vec{T}(\vec{r}) &= \vec{T}(\vec{r} + d\vec{r}) - \vec{T}(\vec{r}) = T_{ij}(\vec{r} + d\vec{r}) \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j - T_{ij}(\vec{r}) \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \\ &= [T_{ij}(\vec{r} + d\vec{r}) - T_{ij}(\vec{r})] \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = [\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \nabla T_{ij}] d\vec{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \vec{T} &= \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \nabla T_{ij} = \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes T_{ij,k} \vec{e}_k = T_{ij,k} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k \\ &\rightarrow d\vec{T} = (\nabla \vec{T}) d\vec{r} \end{aligned}$$

دیورژانس توابع میدانی از نوع بردار

دیورژانس یک تابع میدانی از نوع بردار مانند $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$ به صورت زیر است:

$$\text{div}(\vec{v}(\vec{r})) = \text{tr}(\nabla \vec{v}) = v_{1,1} + v_{2,2} + v_{3,3} = v_{i,i}$$

خواهیم دید که:

$\text{div}(\vec{r}) = 0$ به منزله ثابت بودن جرم در همسایگی ذره $\vec{r}$ است. $\text{div}(\vec{r}) > 0$ به منزله افزایش جرم در همسایگی ذره $\vec{r}$ است. $\text{div}(\vec{r}) < 0$ به منزله کاهش جرم در همسایگی ذره $\vec{r}$ است.

دیورژانس تابع میدانی از نوع تانسور مانند $\vec{T} = \vec{T}(\vec{r})$ به شرح زیر است

$$\text{div}(\vec{T}(\vec{r})) = \text{tr}(\nabla \vec{T}) = \text{tr}(T_{ij,k} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k) = T_{ij,k} \vec{e}_i (\vec{e}_j \cdot \vec{e}_k)$$

$$\text{div}(\vec{T}(\vec{r})) = T_{ij,j} \vec{e}_i$$

همچنین ضرب نقطه‌ای عملگر ∇ در یک بردار به شرح زیر است:

$$\nabla \cdot \vec{a} = \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{e}_i \cdot \vec{a} = \vec{e}_i \cdot \frac{\partial \vec{a}}{\partial x_i} = \vec{e}_i \cdot a_{j,i} \vec{e}_j = a_{j,i} \delta_{ij} = a_{i,i} = \text{div}(\vec{a})$$

ضرب برداری یا خارجی عملگر ∇ و یک بردار مانند $\vec{b}$ به شرح زیر است:

$$\nabla \times \vec{b} = \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{e}_i \times b_j \vec{e}_j = \vec{e}_i \times b_{j,i} \vec{e}_j = b_{j,i} \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k$$

کرل (Curl) یک تابع میدانی از نوع بردار به شرح زیر است:

$$\text{curl}(\vec{v}) = \nabla \times \vec{v} = \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{e}_i \times v_j \vec{e}_j = \vec{e}_i \times v_{j,i} \vec{e}_j = v_{j,i} \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k$$

عملگر ∇^2 به شکل زیر تعریف می شود:

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \vec{e}_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \vec{e}_j \right) = \vec{e}_i \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \vec{e}_j = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$