

جلسه یازدهم

فصل دوم: سینماتیک

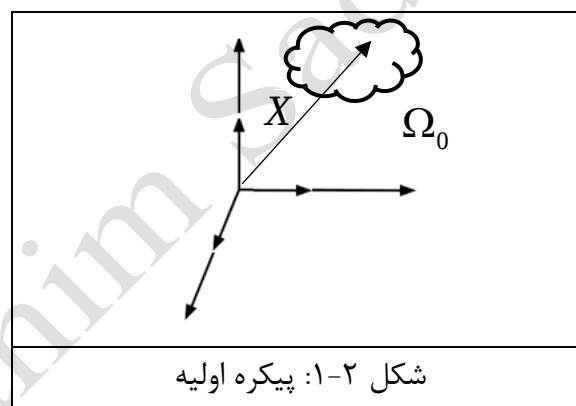
پیکره (Configuration)

آن بخش از فضا که توسط جسم پیوسته در زمان t اشغال شده باشد پیکره جسم در زمان t می‌گویند و آن را با علامت اختصاری Ω_t نشان می‌دهند.

در هر پیکره یک تناظر یک به یک بین ذرات جسم و مکان هندسی آن ذرات وجود دارد به طوری که وجه تمایز ذرات در هر پیکره با بردار مکان آنها مشخص می‌شود به طور واضح هر جسم می‌تواند بشمار پیکره داشته باشد.

پیکره اولیه (Initial – Configuration)

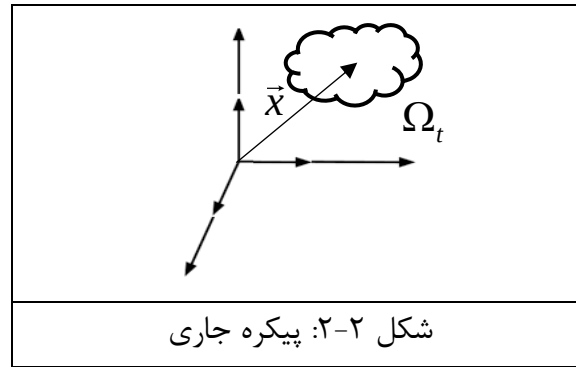
به پیکره جسم در زمان $t = 0$ یا $t = t_0$ اطلاق می‌شود که طبق قرارداد من بعد مکان هندسی ذرات را در پیکره اولیه با X نشان می‌دهیم



پیکره جاری (Current – Configuration)

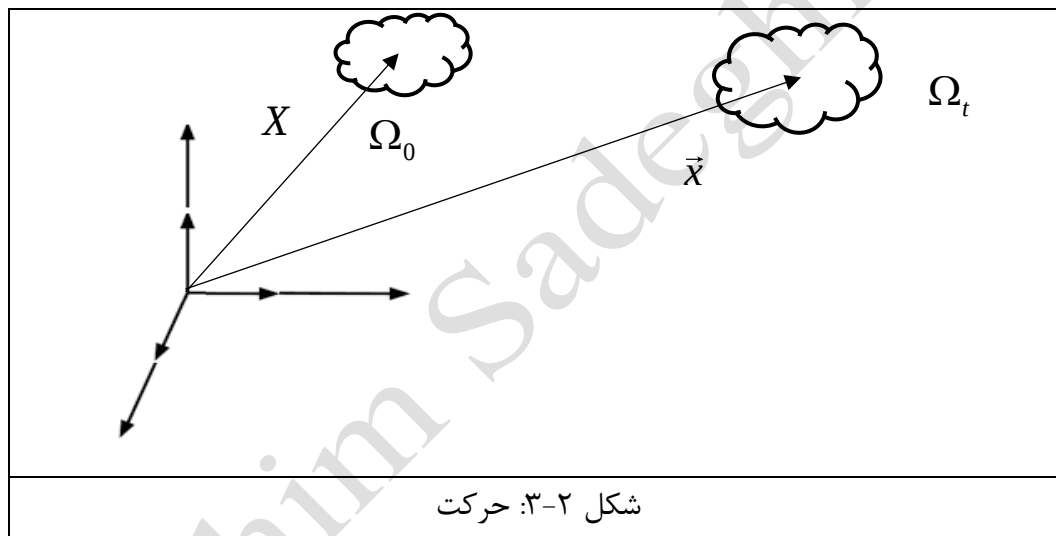
به پیکره جسم در زمان t اطلاق می‌شود در این پیکره مکان هندسی ذرات با نماد $\vec{x}$ نشان داده می‌شود.

ضمن آنکه دستگاه مختصات و مبدا آن می‌تواند برای توصیف دو پیکره متفاوت باشد



حرکت (Motion)

رفتن جسم از یک پیکره به پیکره دیگرش را وقوع یا رخداد حرکت در جسم می‌گوییم. طی این حرکت هر یک از ذرات جسم مسیری را طی کرده‌اند و معادله مسیر طی شده توسط ذرات جسم در این حرکت را با معادله نمادین زیر بیان می‌کند



معادله $\vec{x} = \vec{x}(\vec{X}, t)$ بیانگر مکان لحظه‌ای ذره‌ای است که در زمان $t = 0$ در مکان X قرار داشته است یا به عبارتی دیگر $\vec{x}$ را مکان لحظه‌ای ذره X از پیکره اولیه پس از گذشت زمان t می‌نامند. با فرض و انتخاب دستگاه مختصات کارتزین می‌توان معادله برداری فوق را به سه معادله اسکالر بازنویسی کرد.

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 = x_1(\vec{X}, t) \vec{e}_1 + x_2(\vec{X}, t) \vec{e}_2 + x_3(\vec{X}, t) \vec{e}_3$$

→

$$x_1 = x_1(\vec{X}, t) = x_1(X_1, X_2, X_3, t)$$

$$x_2 = x_2(\vec{X}, t) = x_2(X_1, X_2, X_3, t)$$

$$x_3 = x_3(\vec{X}, t) = x_3(X_1, X_2, X_3, t)$$

→

$$x_1 = x_1(X_1, X_2, X_3, 0) = X_1$$

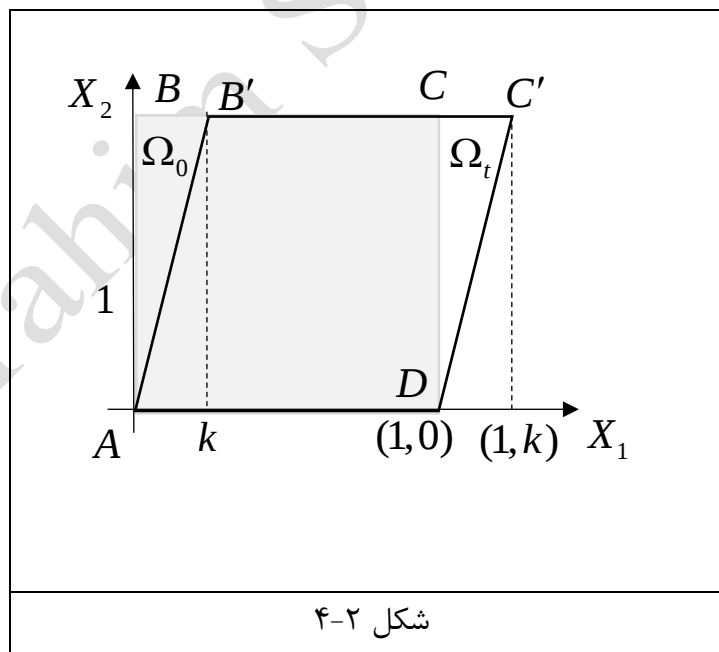
$$x_2 = x_2(X_1, X_2, X_3, 0) = X_2$$

$$x_3 = x_3(X_1, X_2, X_3, 0) = X_3$$

مثال

اگر پیکر یک جسم صفحه ای مربع واحد مطابق شکل باشد، مطلوب است پیکر این جسم در زمان $t=1$

اگر معادله مسیر ذرات جسم به صورت $\vec{X} = \vec{X} + ktX_2 \vec{e}_1$ باشد



$$x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 = X_1 \vec{e}_1 + X_2 \vec{e}_2 + X_3 \vec{e}_3 + ktX_2 \vec{e}_1$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = X_1 + ktX_2 \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

کافیست مکان لحظه ای ذرات واقع روی مرزهای پیکره اولیه را در زمان $t = 1$ تعیین کنیم:

مکان لحظه ای ذرات واقع روی مرز AB

$$\begin{cases} x_1 = kX_2 \\ x_2 = X_2 \end{cases}, 0 < X_2 < 1$$

مکان لحظه ای ذرات واقع روی مرز BC

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + k \\ x_2 = 1 \end{cases}, K < X_1 < K + 1$$

مکان لحظه ای ذرات واقع روی مرز CD

$$\begin{cases} x_1 = 1 + kX_2 \\ x_2 = X_2 \end{cases}, 0 < X_2 < 1$$

مکان لحظه ای ذرات واقع روی مرز AD

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \\ x_2 = 0 \end{cases}, 0 < X_1 < 1$$

توصیف لاگرانژین (Lagrangian – Description)

در این توصیف سعی بر این است که متغیرهای فیزیکی ذرات جسم را به صورت توابعی میدانی پیوسته بر حسب مکان اولیه آنها و زمان سپری شده ارائه کنیم:

$$T = T(\vec{X}, t)$$

بیانگر دمای ذره $\vec{X}$ از پیکره اولیه پس از گذشت زمان t

$$\vec{V} = \vec{V}(\vec{X}, t)$$

بیانگر سرعت ذره $\vec{X}$ از پیکره اولیه پس از گذشت زمان t

اگر $\vec{X}$ را مقدار تثبیت شده γ, β, α فرض نماییم آنگاه معادلات فوق بیانگر دما و سرعت ذره یکتایی می‌شوند که مکان اولیه آن γ, β, α بوده است.

در این دیدگاه فرض بر این است که پیکره اولیه نزد ما معلوم باشد کنید.

توصیف اوپلرین (Eulerian – Description)

در این توصیف سعی بر این است که متغیرهای فیزیکی ذرات جسم را به صورت توابعی میدانی پیوسته بر حسب مکان لحظه ای یا ثانویه آنها و زمان سپری شده ارائه کند.

$$T = T(\vec{x}, t) \quad \text{دمای ذره } \vec{x} \text{ از پیکری جاری } \Omega_t \text{ پس از گذشت زمان } t$$

$$\vec{V} = \vec{V}(\vec{x}, t) \quad \text{سرعت ذره ای که پس از گذشت زمان } t \text{ به مکان } \vec{x} \text{ رسیده است}$$

اگر در معادلات فوق $\vec{X}$ را مقدار تثبیت شده $\gamma_1, \beta_1, \alpha_1$ قرار دهیم آنگاه معادله فوق به صورت دما یا سرعت ذراتی که در زمانهای متفاوت t از مکان ثبت شده $\gamma_1, \beta_1, \alpha_1$ می‌گذرند، در نظر می‌گیریم.

در این دیدگاه پیکره جاری باید برای ما معلوم باشد.

مشتق مادی (Material – Derivative)

نرخ زمانی متغیرهای فیزیکی یک ذره خاص یعنی نرخ تغییرات نسبت به زمان را مشتق مادی می‌گویند و با علامت اختصاری $\frac{D}{Dt}$ آن را نشان می‌دهند.

همانطور که قبلاً ذکر شد متغیرهای فیزیکی ذرات را می‌توان با توابع میدانی پیوسته ای که آرگومان آنها مکان ذره و زمان می‌باشد نشان داد برای مثال:

$$T = T(\vec{x}, t)$$

$$\vec{V} = \vec{V}(\vec{x}, t) \quad \text{اوپلری:}$$

$$\vec{a} = \vec{a}(\vec{x}, t)$$

$$T = T(\vec{X}, t)$$

$$\vec{V} = \vec{V}(\vec{X}, t) \quad \text{لاگرانژی:}$$

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{X}, t)$$

مشتق مادی توابع میدانی از نوع لاگرانژین

اگر دمای ذرات جسم پیوسته به صورت $T = T(\vec{X}, t)$ آنگاه نرخ زمانی دمای ذره $\vec{X}$ در زمان t به شکل زیر محاسبه می‌شود.

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{T(\vec{X}, t+dt) - T(\vec{X}, t)}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} \frac{dt}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

به طور کلی مشتق مادی متغیرهای اسکالری به صورت زیر تعریف می شود:

$$\frac{D(\quad)}{Dt} = \frac{\partial(\quad)}{\partial t}$$

اگر معادله مسیر ذرات جسم به صورت $\vec{X} = \vec{X}(\vec{X}, t)$ داشته باشیم، آنگاه نرخ زمانی مکان لحظه ای ذره $\vec{X}$ در زمان t برابر می شود با:

$$v(\vec{X}, t) = \frac{D\vec{X}}{Dt} = \frac{\vec{X}(\vec{X}, t+dt) - \vec{X}(\vec{X}, t)}{dt} = \frac{d\vec{X}}{dt} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial t}$$

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial x_1}{\partial t}, v_2 = \frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial x_2}{\partial t}, v_3 = \frac{dx_3}{dt} = \frac{\partial x_3}{\partial t}$$

$$v_i = \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial x_i(X_1, X_2, X_3)}{\partial t}$$

اگر سرعت ذرات جسم فوق به صورت تابع میدانی $\vec{V} = \vec{V}(\vec{X}, t)$ معلوم باشد، آنگاه تغییرات سرعت نسبت به زمان برای ذره $\vec{X}$ در زمان t برابر است با:

$$\vec{a}(\vec{X}, t) = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\vec{V}(\vec{X}, t+dt) - \vec{V}(\vec{X}, t)}{dt} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

$$a_i = \frac{\partial v_i(X_1, X_2, X_3, t)}{\partial t}$$

مثال

اگر مولفه های سرعت ذرات یک جسم به شرح زیر باشند، مطلوبست محاسبه شتاب و مکان ذره ای جسم:

$$v_1 = \frac{kX_1}{1+kt}, v_2 = \frac{kX_2}{1+kt}, v_3 = \frac{kX_3}{1+kt}$$

حل

$$a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t}$$

$$a_1 = \frac{\partial \left(\frac{kX_1}{1+kt} \right)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(kX_1 (1+kt)^{-1} \right) = kX_1 * (-1) * k * (1+kt)^{-2}$$

$$a_1 = -\frac{k^2 X_1}{(1+kt)^2}, a_2 = -\frac{k^2 X_2}{(1+kt)^2}, a_3 = -\frac{k^2 X_3}{(1+kt)^2}$$

مکان لحظه ای $\vec{x} = \vec{x}(\vec{X}, t)$

$$\left. \begin{array}{l} v_i = \frac{\partial x_i}{\partial t} \\ v_1 = \frac{kX_1}{1+kt} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{kX_1}{1+kt} dt = dx \rightarrow \int_0^t \frac{kX_1}{1+kt} dt = \int_{x_1}^{x_1} dx$$

$$\rightarrow x_1 - X_1 = X_1 \ln(1+kt) \rightarrow x_1 = X_1 (1 + \ln(1+kt))$$

$$x_2 = X_2 (1 + \ln(1+kt))$$

$$x_3 = X_3 (1 + \ln(1+kt))$$