

جلسه دوازدهم

مشتق مادی توابع میدانی از نوع اویلری

حال اگر دمای ذرات جسم در پیکره Ω_t به شرح $T = T(\vec{x}, t)$ در نزد ما معلوم باشد. آنگاه نرخ تغییرات دمای ذره $\vec{x}$ در زمان t به شرح زیر است:

$$\begin{aligned} \frac{DT}{Dt} &= \frac{T(\vec{x} + d\vec{x}, t + dt) - T(\vec{x}, t)}{dt} = \frac{\nabla_x T \cdot d\vec{x} + \frac{\partial T}{\partial t} dt}{dt} = \nabla_x T \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} + \frac{\partial T}{\partial t} \\ &= \nabla_x T \cdot \vec{v} + \frac{\partial T}{\partial t} \end{aligned}$$

به طور کلی مشتق مادی متغیرهای فیزیکی از نوع اسکالر به صورت زیر تعریف می شود:

$$\frac{D(\quad)}{Dt} = \nabla_x (\quad) \cdot \vec{v} + \frac{\partial(\quad)}{\partial t}$$

اگر سرعت ذرات جسم در پیکره جاری به صورت تابع میدانی $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x}, t)$ در نزد ما معلوم باشد آنگاه نرخ تغییرات سرعت ذره $\vec{x}$ نسبت به زمان برابر است با:

$$\begin{aligned} \vec{a}(\vec{x}, t) &= \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\vec{v}(\vec{x} + d\vec{x}, t + dt) - \vec{v}(\vec{x}, t)}{dt} = \frac{(\nabla \vec{v}) d\vec{x} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt}{dt} = (\nabla \vec{v}) \frac{d\vec{x}}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \\ &= (\nabla \vec{v}) \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \rightarrow a_i \vec{e}_i = v_{i,j} v_j \vec{e}_i + \frac{\partial v_i}{\partial t} \vec{e}_i \rightarrow a_i = v_{i,j} v_j + \frac{\partial v_i}{\partial t} \end{aligned}$$

و قالب ماتریسی به فرم زیر است:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial t} \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} \\ \frac{\partial v_3}{\partial t} \end{bmatrix}$$

مثال

اگر مولفه های سرعت ذرات جسم در پیکره جاری آن به شرح زیر باشد، مطلوب است شتاب ذره و مکان لحظه ای ذره.

$$v_1 = \frac{kx_1}{1+kt}, v_2 = \frac{kx_2}{1+kt}, v_3 = \frac{kx_3}{1+kt}$$

حل

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial t} \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} \\ \frac{\partial v_3}{\partial t} \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k}{1+kt} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k}{1+kt} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k}{1+kt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{kx_1}{1+kt} \\ \frac{kx_2}{1+kt} \\ \frac{kx_3}{1+kt} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-k^2 x_1}{(1+kt)^2} \\ \frac{-k^2 x_2}{(1+kt)^2} \\ \frac{-k^2 x_3}{(1+kt)^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

که نشانگر آن است که سرعت ذره $\vec{X}$ با گذشت زمان از لحاظ اندازه راستا و جهت تغییر نمی کند.

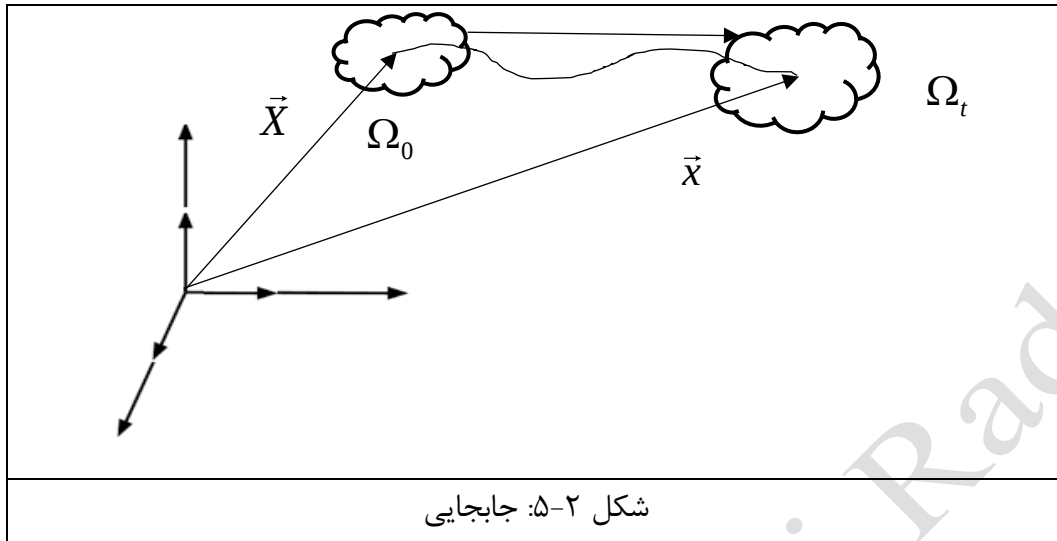
$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = \frac{kx_1}{1+kt} \rightarrow \int_{x_1}^{x_1} \frac{dx_1}{x_1} = \int_0^t \frac{kx}{1+kt} dt \rightarrow \ln \frac{x_1}{X_1} = \ln(1+kt)$$

$$\rightarrow x_1 = X_1(1+kt), x_2 = X_2(1+kt), x_3 = X_3(1+kt)$$

واژه جایگزین در رابطه سرعت داریم:

$$v_1 = kX_1, v_2 = kX_2, v_3 = kX_3$$

میدان جابجایی ذرات یک جسم پیوسته



میدان جابجایی ذرات یک جسم به دو شکل لاگرانژین و اویلرین قابل بیان است

دیدگاه لاگرانژین: جابجایی ذره $\vec{X}$ پس از گذشت زمان t

$$\vec{u} = \vec{u}(\vec{X}, t)$$

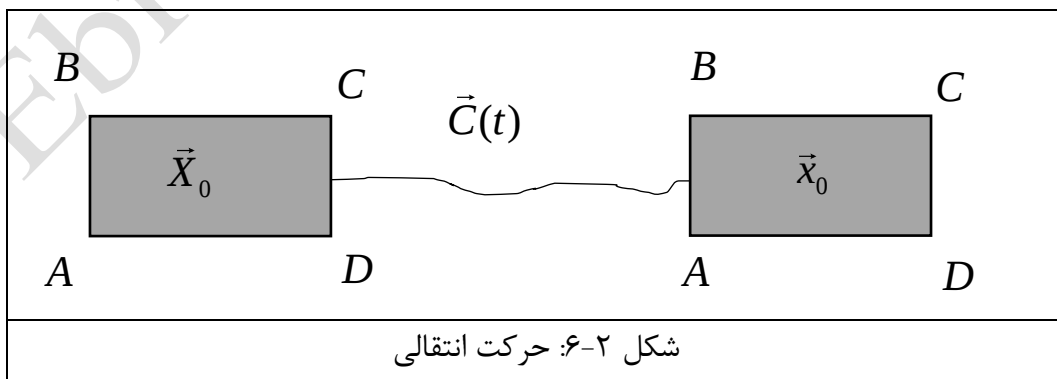
دیدگاه اویلری: جابجایی ذره $\vec{x}$ در پیکره جاری پس از گذشت زمان t

$$\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$$

حرکت جسم صلب (Rigid – Body – Motion)

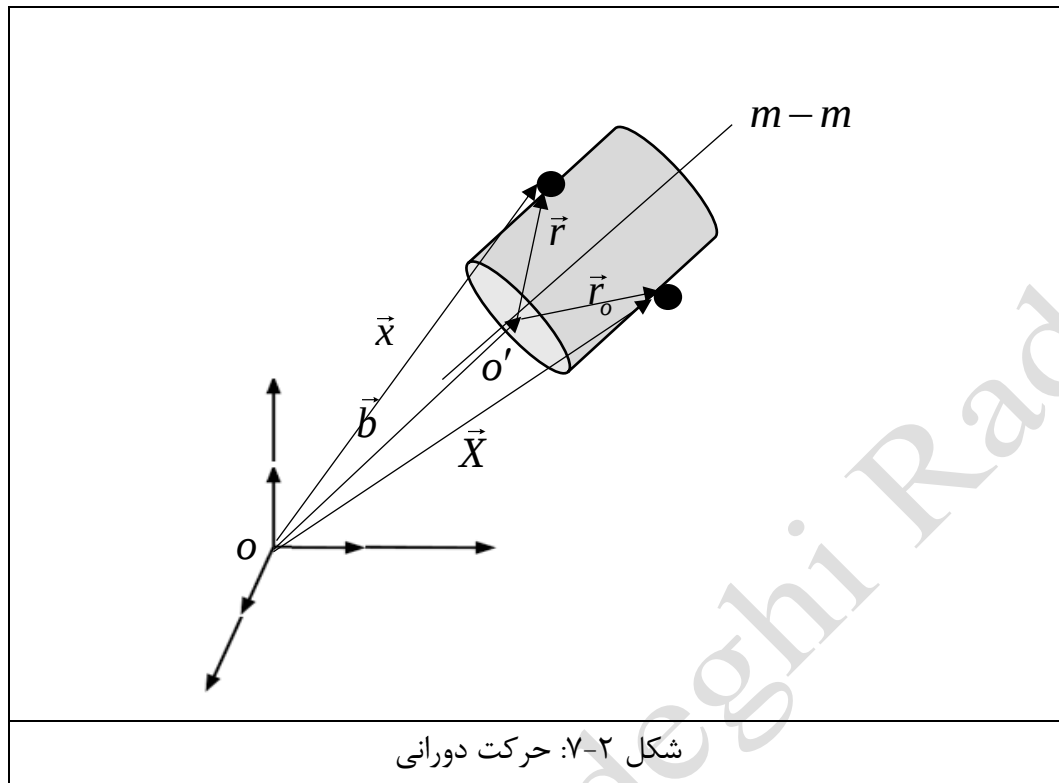
همانطور که از دینامیک می دانیم حرکت جسم صلب از سه حالت خارج نیست:

(۱) حرکت انتقالی محض که در این حرکت جابجایی تک تک ذرات با هم برابر است و برای مثال $\vec{C}(t)$ است



$$\vec{x} - \vec{X} = \vec{C}(t)$$

(۲) حرکت دورانی محض که در آن حرکت دورانی باید جسم حول یک محور بچرخد.



$$\vec{r}_0 \rightarrow r, \vec{r} = \vec{R}(t)\vec{r}_0$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{r}_0 = \vec{X} - \vec{b} \\ \vec{r} = \vec{x} - \vec{b} \end{array} \right\} \rightarrow \vec{x} - \vec{b} = \vec{R}(t)(\vec{X} - \vec{b})$$

اگر مبدا مختصات یعنی محل قرارگیری ناظر روی O' قرار گیرد آنگاه:

$$\vec{b} = 0 \rightarrow \vec{x} = \vec{R}(t)\vec{X}$$

(۳) حرکت جسم به صورت ترکیبی از انتقال و دوران

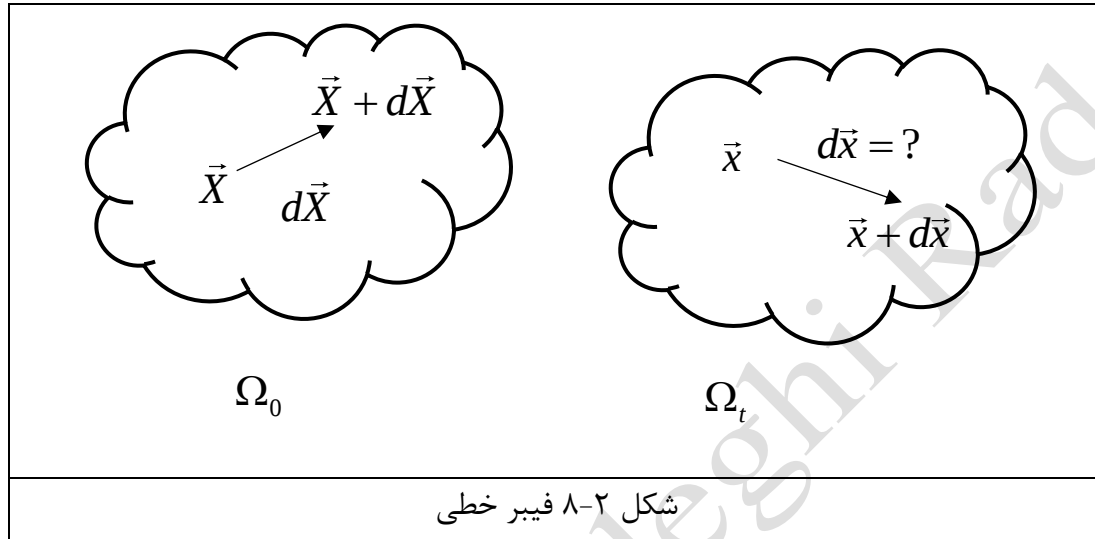
$$\begin{aligned} \vec{X} &\xrightarrow{\text{Rotation}} \vec{R}(t)\vec{X} \xrightarrow{\text{Transmition}} \vec{R}(t)\vec{X} + \vec{C}(t) \\ &\rightarrow \vec{x} = \vec{R}(t)\vec{X} + \vec{C}(t) \end{aligned}$$

رابطه بین المان های خطی در پیکره اولیه و جاری

در این بخش هدف این است که ارتباط بین المان ها یا اصطلاحاً فیبرهای خطی در پیکره اولیه را با متناظرشان در پیکره جاری پیدا کنیم.

برای این کار نیاز به دانستن میدان جابجایی یا معادله مسیر حرکت ذرات داریم.

میدان جابجایی به دو صورت لاگرانژین یا اویلرین برای ما مشخص است ابتدا با فرض میدان جابجایی از دیدگاه لاگرانژین کار می کنیم:



میدان جابجایی به صورت $\vec{u} = \vec{u}(\vec{X}, t)$ برای ما مشخص باشد هدف پیدا کردن $d\vec{x}$ که تغییر یافته $d\vec{X}$ است، بر حسب $d\vec{X}$ است و داریم:

$$d\vec{x} = (\vec{x} + d\vec{x}) - \vec{x} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{x} - \vec{X} = \vec{u}(\vec{X}, t) \end{array} \right\} \rightarrow d\vec{x} = \vec{X} + d\vec{X} + \vec{u}(\vec{X} + d\vec{X}, t) - \vec{X} - \vec{u}(\vec{X}, t) =$$

$$d\vec{X} + (\nabla_{\vec{X}} \vec{u}) d\vec{X} \rightarrow d\vec{x} = (\vec{I} + \nabla_{\vec{X}} \vec{u}) d\vec{X}$$

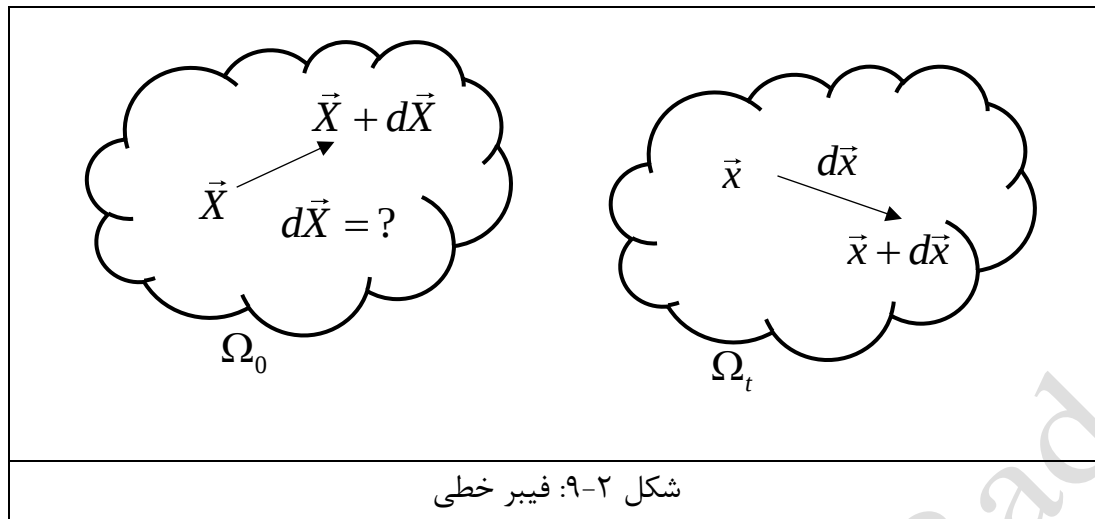
برای مثال برای حرکت صلب $\vec{x} = \vec{R}(t)\vec{X} + \vec{C}(t)$ داریم:

$$(\vec{x} + d\vec{x}) - (\vec{x}) = \vec{R}(t)(\vec{X} + d\vec{X}) + \vec{C}(t) - \vec{R}(t)\vec{X} - \vec{C}(t) = \vec{R}(t)d\vec{X}$$

$$\rightarrow d\vec{x} = \vec{R}(t)d\vec{X}$$

ارتباط بین المان های خطی از نگاه اویلرین

در این دیدگاه میدان جابجایی ذرات پیکره Ω_t به صورت $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ برای ما مشخص است.



شکل ۲-۹: فیبر خطی

داریم:

$$\left. \begin{aligned} d\vec{X} &= (\vec{X} + d\vec{X}) - \vec{X} \\ \vec{X} &= \vec{x} - \vec{u}(\vec{x}, t) \end{aligned} \right\} \rightarrow d\vec{X} = (\vec{x} + d\vec{x}) - \vec{u}(\vec{x} + d\vec{x}, dt) - \vec{x} + \vec{u}(\vec{x}, t) =$$

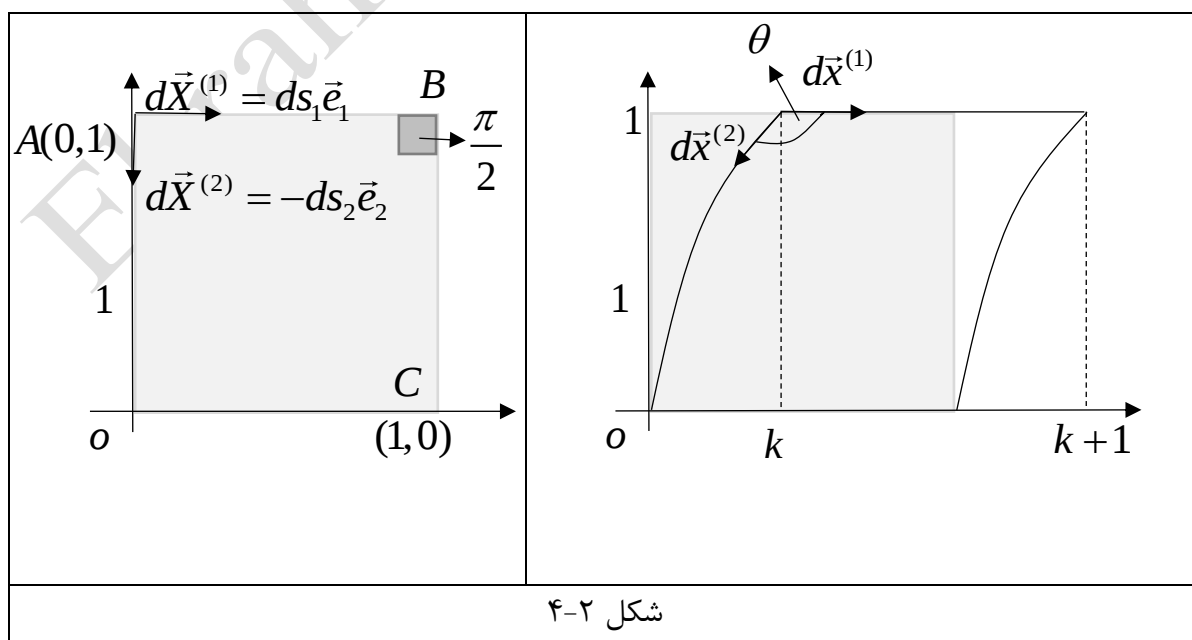
$$-(\vec{u}(\vec{x} + d\vec{x}, dt) - \vec{u}(\vec{x}, t)) + d\vec{x} \rightarrow d\vec{X} = \vec{I}d\vec{x} - \nabla_x \vec{u}d\vec{x}$$

$$\rightarrow d\vec{X} = (\vec{I} - \nabla_x \vec{u})d\vec{x}$$

مثال: اگر میدان جابجایی ذرات جسم به صورت $u_1 = kX_2^2, u_2 = u_3 = 0$ باشد آنگاه مطلوب است

الف) پیکره نهایی جسم مربعی نشان داده شده

ب) تغییر شکل یافته المان های خطی نشان داده شده اعم از راستا اندازه و جهت



شکل ۲-۴

$$x_1 = X_1 + u_1 = X_1 + kX_2^2$$

$$x_2 = X_2 + u_2 = X_2$$

$$x_3 = X_3 + u_3 = X_3$$

برای ضلع ها داریم:

$$oA: (0, X_2) \rightarrow (kX_2^2, X_2): X_1 = kx_2^2, 0 < x_2 < 1$$

$$AB: (X_1, 1) \rightarrow (X_1 + k, 1): x_2 = 1, k < x_1 < k + 1$$

$$oC: (X_1, 0) \rightarrow (X_1, 0): x_2 = 0, 0 < x_1 < 1$$

$$CB: (1, X_2) \rightarrow (1 + kX_2^2, X_2): x_1 = 1 + Kx_2^2, 0 < x_2 < 1$$

برای فیبر ها داریم:

$$d\vec{x} = (\vec{I} + \nabla_x \vec{u}) d\vec{X} \rightarrow \{d\vec{x}\} = [\vec{I} + \nabla_x \vec{u}] \{d\vec{X}\}$$

$$[\nabla_x \vec{u}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2kX_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow [\vec{I} + \nabla_x \vec{u}] = \begin{bmatrix} 1 & 2kX_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \{d\vec{x}^{(1)}\} = [\vec{I} + \nabla_x \vec{u}]_{(X_1=0, X_2=1)} \{d\vec{X}^{(1)}\}$$

$$\rightarrow \{d\vec{x}^{(1)}\} = \begin{bmatrix} 1 & 2k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} ds_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ds_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\rightarrow d\vec{x}^{(1)} = ds_1 \vec{e}_1$$

$$\rightarrow \{d\vec{x}^{(2)}\} = \begin{bmatrix} 1 & 2k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -ds_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2kds_2 \\ -ds_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\rightarrow d\vec{x}^{(2)} = -2kds_2 \vec{e}_1 - ds_2 \vec{e}_2$$

$$\frac{|d\vec{x}^{(1)}|}{|d\vec{X}^{(1)}|} = \frac{ds_1}{ds_1} = 1$$

$$\frac{|d\vec{x}^{(2)}|}{|d\vec{X}^{(2)}|} = \frac{ds_2 \sqrt{1+4k^2}}{ds_2} = \sqrt{1+4k^2}$$

$$d\vec{x}^{(1)} \cdot d\vec{x}^{(2)} = |d\vec{x}^{(1)}| |d\vec{x}^{(2)}| \cos \theta \rightarrow \cos \theta = \frac{d\vec{x}^{(1)} \cdot d\vec{x}^{(2)}}{|d\vec{x}^{(1)}| |d\vec{x}^{(2)}|}$$

$$\rightarrow \cos \theta = \frac{2kds_1 ds_2}{ds_1 ds_2 \sqrt{1+4k^2}} \rightarrow \theta = \cos^{-1} \left(\frac{2k}{\sqrt{1+4k^2}} \right)$$