

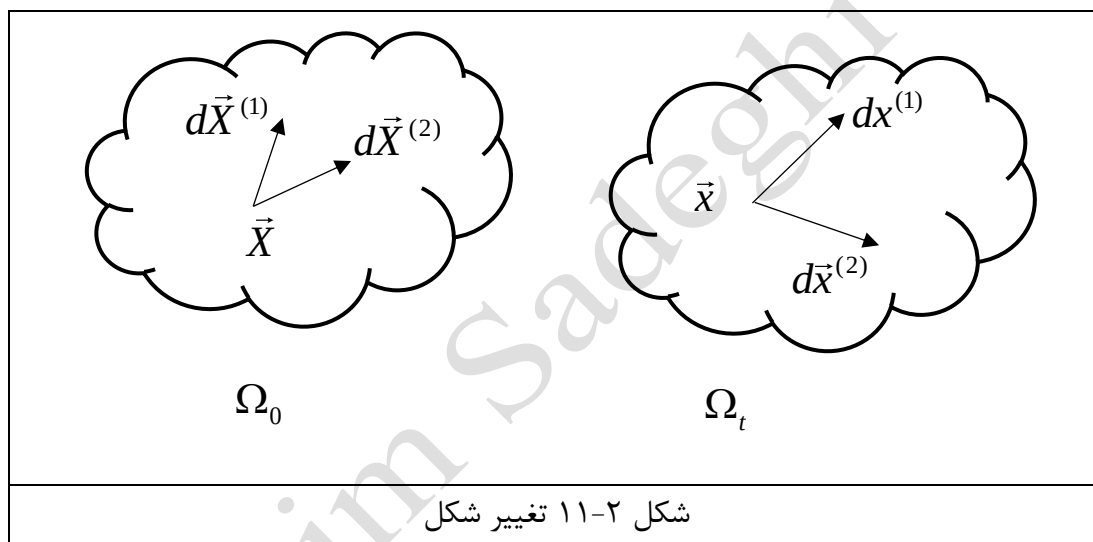
جلسه سیزدهم

تغییر شکل (Deformation)

به طور کلی تغییر شکل در همسایگی یک ذره وقتی رخ می دهد که حداقل یکی از موارد زیر رخ دهد

۱- طول فیبرهای گذرا از آن ذره دچار تغییر ابعاد و اندازه شوند

۲- زاویه بین فیلمهای گذرا از آن ذره نسبت به حالت اولیه شان تغییر یابد



فرمول اندازه گیری تغییر شکل در ریاضی به شکل زیر است:

$$Deformation(\vec{X}, t) = d\vec{x}^{(1)} \cdot d\vec{x}^{(2)} - d\vec{X}^{(1)} \cdot d\vec{X}^{(2)}$$

در ادامه به دنبال تعریف تغییر شکل به صورت یک تابع میدانی پیوسته بر حسب مکان ذره و زمان آن هستیم و می دانیم که هر تا به میدانی به صورت لاگرانژی و اویلری قابل بیان است.

در ابتدا سعی داریم تا به میدانی تغییر شکل را به صورت لاگرانژی تعریف نماییم و برای این کار نیاز به دانستن میدان جابجایی ذرات به صورت $\vec{u} = \vec{u}(\vec{X}, t)$ داریم.

با دانستن این میدان می توان تغییر یافته های $dX^{(1)}, dX^{(2)}$ را که به ترتیب با $dx^{(1)}, dx^{(2)}$ نشان داده شده اند پیدا کنیم.

$$d\vec{X}^{(1)} = (\vec{I} + \nabla_x \vec{u}) d\vec{X}^{(1)}$$

$$d\vec{X}^{(2)} = (\vec{I} + \nabla_x \vec{u}) d\vec{X}^{(2)}$$

$$D = \left((\vec{I} + \nabla_x \vec{u}) d\vec{X}^{(1)} \right) \cdot \left((\vec{I} + \nabla_x \vec{u}) d\vec{X}^{(2)} \right) - d\vec{X}^{(1)} \cdot d\vec{X}^{(2)}$$

$$= d\vec{X}^{(1)} \cdot (\vec{I} + \nabla_x \vec{u})^T (\vec{I} + \nabla_x \vec{u}) d\vec{X}^{(2)} - d\vec{X}^{(1)} \cdot \vec{I} d\vec{X}^{(2)}$$

$$= d\vec{X}^{(1)} \cdot \left((\vec{I} + \nabla_x \vec{u})^T (\vec{I} + \nabla_x \vec{u}) - \vec{I} \right) d\vec{X}^{(2)}$$

$$= d\vec{X}^{(1)} \cdot \left((\nabla_x \vec{u}) + (\nabla_x \vec{u})^T + (\nabla_x \vec{u})^T (\nabla_x \vec{u}) \right) d\vec{X}^{(2)}$$

$$\left((\nabla_x \vec{u}) + (\nabla_x \vec{u})^T + (\nabla_x \vec{u})^T (\nabla_x \vec{u}) \right) = 2\vec{E}$$

$$\rightarrow \vec{E} = \left((\nabla_x \vec{u}) + (\nabla_x \vec{u})^T + (\nabla_x \vec{u})^T (\nabla_x \vec{u}) \right) / 2$$

$\vec{E}$ را تانسور کرنش گرین می نامند و نماد تغییر شکل است

$$E_{ij}(\vec{X}, t) = u_{i,j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_m}{\partial X_i} \frac{\partial u_m}{\partial X_j} \right)$$

$$[\vec{E}] = \left([(\nabla_x \vec{u})] + [(\nabla_x \vec{u})]^T + [(\nabla_x \vec{u})]^T [(\nabla_x \vec{u})] \right) / 2$$

می توان تغییر شکل ها را از لحاظ اندازه به تغییر شکل های بزرگ و تغییر شکل های کوچک تقسیم بندی کرد که در اینجا خودمان را به تغییر شکل های کوچک محدود می کنیم و منظور از تغییر شکل های کوچک مرتبه مولفه های گرادیان 10^{-4} یا کوچکتر می باشد. در نتیجه می توان از عبارت $[(\nabla_x \vec{u})]^T [(\nabla_x \vec{u})]$ در مقابل دو جمله دیگر صرف نظر کرد آنگاه تانسور تغییر شکل تعریف شده به شرح زیر می گردد:

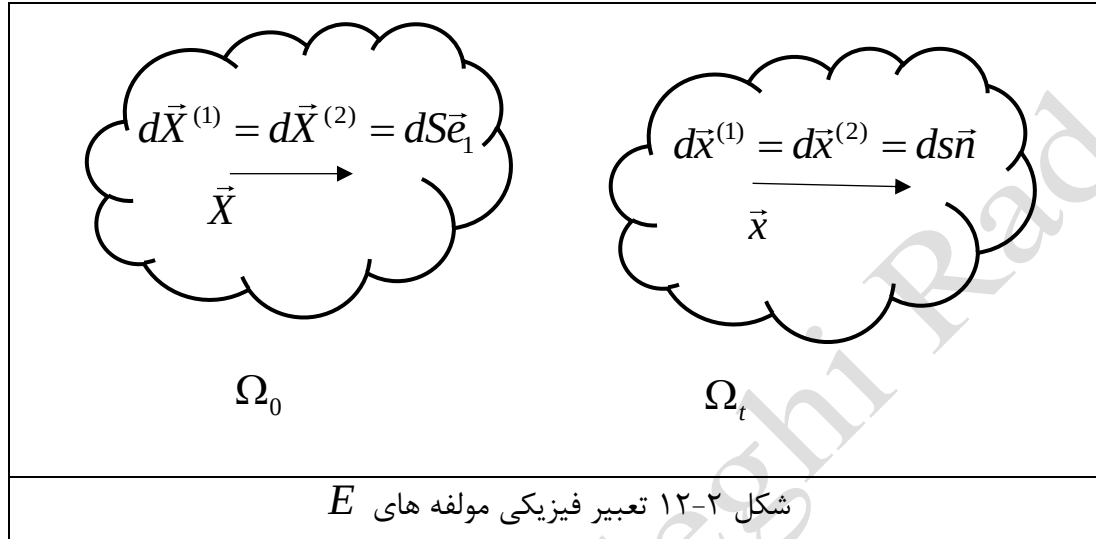
$$\vec{E}(\vec{X}, t) \simeq \left((\nabla_x \vec{u}) + (\nabla_x \vec{u})^T \right) / 2 = \vec{E}^*(\vec{X}, t)$$

همانطور که دیده می شود تانسور کرنش متقارن و دارای ۶ مولفه می باشد و در ادامه به تعبیر فیزیکی این مولفه ها می پردازیم

$$D = d\vec{X}^{(1)} \cdot d\vec{X}^{(2)} - d\vec{X}^{(1)} \cdot d\vec{X}^{(2)} = 2d\vec{X}^{(1)} \cdot \vec{E}^*(\vec{X}, t) d\vec{X}^{(2)}$$

تعبیر فیزیکی مولفه های قطری $\vec{E}^*$

$$E^* \rightarrow E_{11}^*, E_{22}^*, E_{33}^* = ?$$



منظور کافیت المان های خطی $dX^{(1)}, dX^{(2)}$ را در راستای $\vec{e}_1$ انتخاب کنیم:

$$d\vec{x}^{(1)} \cdot d\vec{x}^{(2)} - d\vec{X}^{(1)} \cdot d\vec{X}^{(2)} = 2d\vec{X}^{(1)} \cdot \vec{E}^*(\vec{X}, t) d\vec{X}^{(2)}$$

$$\rightarrow (ds)^2 - (dS)^2 = 2(dS)^2 \vec{e}_1 \cdot \vec{E}^* \vec{e}_1$$

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{E}^* \vec{e}_1 = E_{11}^* \rightarrow E_{11}^*(\vec{X}, t) = \frac{(ds)^2 - (dS)^2}{2(dS)^2}$$

$$\rightarrow E_{11}^*(\vec{X}, t) = \frac{(ds - dS)(ds + dS)}{2(dS)^2} = \frac{ds - dS}{dS}$$

بنابراین

E_{11}^* بیانگر کرنش طولی فیبر گذرا از $\vec{X}$ در راستای $\vec{e}_1$

E_{22}^* بیانگر کرنش طولی فیبر گذرا از $\vec{X}$ در راستای $\vec{e}_2$

E_{33}^* بیانگر کرنش طولی فیبر گذرا از $\vec{X}$ در راستای $\vec{e}_3$

Ebrahim Sadeghi Rad