جلسه دوم:

فصل اول: جبر تانسوری و برداری

اهداف کلی مقاومت مصالح ۳

۱. ارائه معادلات حاکم بر فرایندهای مکانیکی از طریق برآورده کردن پنج اصل مکانیک شامل اصول: بقای جرم، بقای مومنتوم خطی، بقای مومنتوم زاویه ای، بقای انرژی و قانون دوم ترمودینامیک

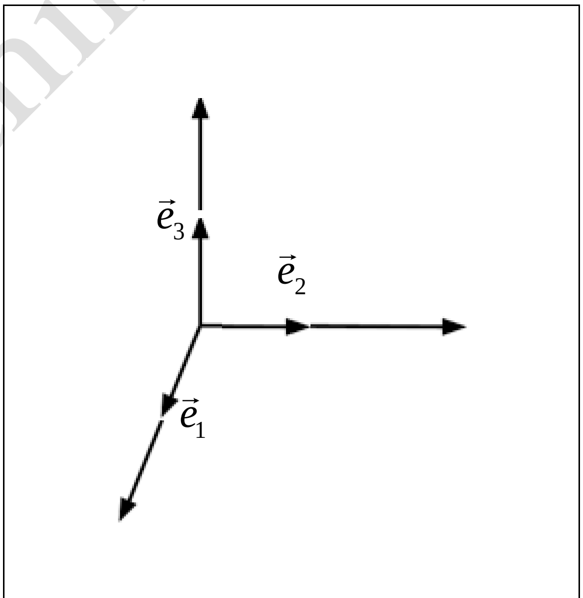
۲. توصیف رفتار ماده و برقراری ارتباط بین تنش کرنش یا نیرو و جابجایی از طریق ذات ماده و همچنین نتایج آزمایشگاهی، در قالب یک معادله ریاضی قابل بیان.

برای رسیدن به اهداف درس نیاز به بستر سازی و تعریف یکسری عملگر است و این بستر سازی از طریق ریاضیات شکل می گیرد

جبر تانسوری و برداری

در این درس سعی بر این است که متغیرهای فیزیکی ذره و همچنین معادلات حاکم بر مسئله را در قالب سمبل $(Symbolic)$ اندیس $(index)$ و ماتریسی $(Matrix)$ بیان کنیم.

برای مثال اگر در دستگاه مختصات کارتزین راستگرد زیر را به عنوان مرجع سنجش برای توصیف متغیرها در نظر بگیریم و $\left(\vec{e}_3,\vec{e}_2,\vec{e}_1\right)$ را به عنوان پایه های دستگاه بنامیم:



شکل ۱-۱: دستگاه مختصات کارتزین

نمایش اندیسی مولفه های برداری و تانسوری خواص ذره که به نوعی بیانگر خواص هندسی و فیزیکی ذره هستند به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$a_i, x_i, T_{ij}, E_{ijkl}$$

به (i, j, k, l) اندیس گفته می‌شود و این اندیس ها می توانند اعداد ۱ تا ۳ را اختیار کنند.

استفاده از قالب اندیسی برای متغیرها همراه با رعایت قرارداد زیر کمک شایانی به فشرده سازی و راحت تر کردن اثبات و ارائه معادلات حاکم می کند.

تعریف اندیس تکراری

اگر در یک جمله از یک عبارت جبری اندیسی دقیقاً دو بار ظاهر شود یعنی یکبار تکرار گردد به آن اندیس تکراری می گویند و اندیس تکراری در این درس به‌منزله جمع بستن آن عبارت روی شمارنده تکراری است، برای مثال داریم:

$$T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33} = T_{mm} = T_{jj}$$
$$T_{ij}x_j = T_{i1}x_1 + T_{i2}x_2 + T_{i3}x_3$$

تعریف اندیس آزاد

اگر در یک جمله از عبارات جبری اندیسی فقط یک بار ظاهر شود به آن اندیس آزاد می گویند

$$T_{ij} \to i, j$$
$$x_i T_{ij} \to j$$

ضمن اینکه در هنگام استفاده از قالب اندیسی باید قراردادهای زیر را رعایت کنید:

۱. اندیس تکراری در یک جمله از عبارت جبری فقط و فقط می تواند یک بار تکرار شود یعنی دقیقاً دو بار ظاهر شود

$T_{ij}P_{jj}$ نادرست

$(T_{11}+T_{22}+T_{33})^2 = (T_{11}+T_{22}+T_{33})(T_{11}+T_{22}+T_{33}) = T_{ii}T_{jj}$ درست

$(T_{11}+T_{22}+T_{33})^2 = (T_{11}+T_{22}+T_{33})(T_{11}+T_{22}+T_{33}) = T_{ii}T_{ii}$ نا درست

۲. اگر در یک جمله از عبارت جبری اندیسی آزاد مانند i وجود داشته باشد آنگاه بایستی بقیه جملات دقیقاً اندیس آزاد مانند i را داشته باشند

درست $x_i + T_{ij}x_j$ نادرست $x_i + T_{pj}x_j$

مثال

مطلوبست فرم فشرده عبارات زیر:

$$\begin{Bmatrix} x_1 = T_{11}a_1 + T_{12}a_2 + T_{13}a_3 \\ x_2 = T_{21}a_1 + T_{22}a_2 + T_{23}a_3 \\ x_3 = T_{31}a_1 + T_{32}a_2 + T_{33}a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_{1i}a_i \\ T_{2i}a_i \\ T_{3i}a_i \end{Bmatrix} \to x_j = T_{ji}a_i$$

تعریف دلتای کرونکر

دلتای کرونکر که به علامت اختصاری δ_{ij} نشان داده می شود به صورت زیر است:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1+1+1=3$$

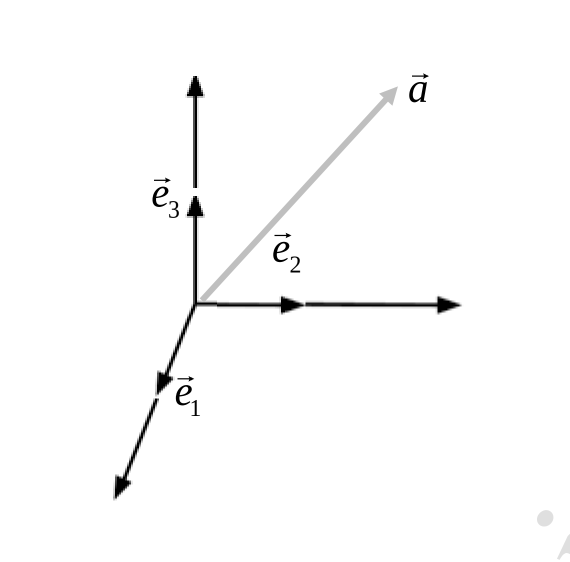
$$\delta_{ij}x_j = \delta_{i1}x_1 + \delta_{i2}x_2 + \delta_{i3}x_3 = x_i$$

$$T_{ij}\delta_{jm} = T_{im}$$

یعنی به صورت ساده دلتا حذف و اندیس غیر مشترک آن جایگزین اندیس مشترک در عبارت دیگر خواهد شد.

اگر پایه های دستگاه مختصات راستگرد را با $(\vec{e}_i)$ نشان دهیم آنگاه : $\vec{e}_i.\vec{e}_j = \delta_{ij}$

نمایش اندیسی یک بردار در دستگاه مختصات فوق به شرح زیر است:



شکل ۱-۲: نمایش بردار

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 = a_i\vec{e}_i$$

ضرب نقطه ای یک بردار مثل $\vec{a}.\vec{b}$ به شرح زیر است:

$$\vec{a}.\vec{b} = (a_i\vec{e}_i).(b_j\vec{e}_j) = a_i b_j(\vec{e}_i.\vec{e}_j) = a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i$$