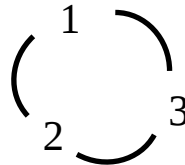


جلسه سوم

ابزار جایگشت

ابزار جایگشت با علامت اختصاری ε_{ijk} نشان داده می شود، داریم:

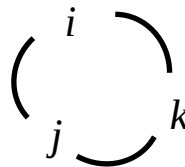


$\rightarrow \varepsilon_{ijk} = +1$ اگر ترتیب به صورت یکی از حالت‌های پادساعتگرد حلقه بسته باشد

$\rightarrow \varepsilon_{ijk} = -1$ اگر حلقه فوق ساعتگرد باشد

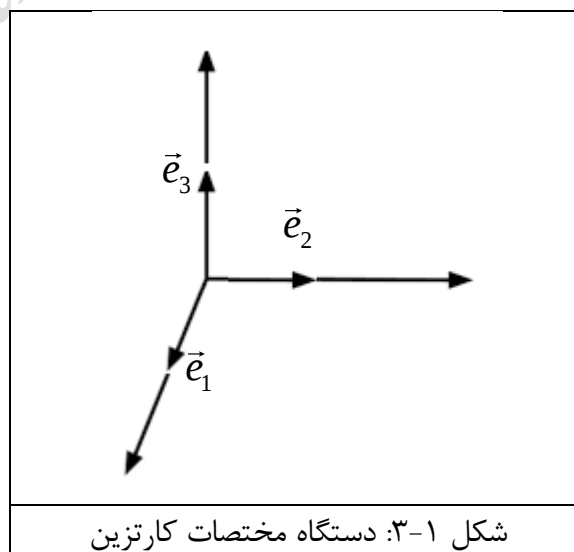
$\rightarrow \varepsilon_{ijk} = 0$ اگر یکی از اندیس‌ها حداقل یک بار تکرار شده باشد

علاوه بر آن ترتیب اندیس‌های ijk در ε_{ijk} می‌توانند به صورت زیر تفسیر یابد به شرط آنکه مقدار ε_{ijk} تغییر نکند، با فرض دور پادساعتگرد داریم:



$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{kji} = \varepsilon_{jik}$$

با پذیرفتن این تعریف می‌توان حاصل ضرب بردارهای پایه‌های دستگاه مختصات راستگرد را به صورت زیر



شکل ۱-۳: دستگاه مختصات کارتزین

می توان نوشت:

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k = \varepsilon_{ij1} \vec{e}_1 + \varepsilon_{ij2} \vec{e}_2 + \varepsilon_{ij3} \vec{e}_3$$

$$\text{for : } i=1, j=2 \rightarrow \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \varepsilon_{12k} \vec{e}_k = \varepsilon_{121} \vec{e}_1 + \varepsilon_{122} \vec{e}_2 + \varepsilon_{123} \vec{e}_3 = +1\vec{e}_3 = \vec{e}_3$$

و با تعمیم دادن داریم:

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j : \begin{cases} \vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = 0 & \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 & \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2 \\ \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3 & \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = 0 & \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \\ \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1 & \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 = 0 \end{cases}$$

حال اگر طرفین رابطه فوق را در بردار یک مانند $\vec{e}_m$ ضرب نقطه ای کنیم داریم:

$$\vec{e}_m \bullet (\vec{e}_i \times \vec{e}_j) = \vec{e}_m \bullet \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_m \bullet \vec{e}_k = \varepsilon_{ijk} \delta_{mk} = \varepsilon_{ijm} \stackrel{C.C.W}{=} \varepsilon_{mij}$$

علاوه بر آن ε_{mij} را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\varepsilon_{mij} = \vec{e}_m \bullet (\vec{e}_i \times \vec{e}_j)$$

و یا

$$\varepsilon_{ijk} = \vec{e}_i \bullet (\vec{e}_j \times \vec{e}_k)$$

یادآوری

از طرفی از ریاضیات ۱ فصول آخر می دانیم:

$$\text{if } [A] = \begin{bmatrix} \text{Components of vector } \vec{a} \\ \text{Components of vector } \vec{b} \\ \text{Components of vector } \vec{c} \end{bmatrix} \rightarrow \det([A]) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

در نتیجه می توان ε_{ijk} را به صورت زیر نوشت:

$$\varepsilon_{ijk} = \vec{e}_i \bullet (\vec{e}_j \times \vec{e}_k) = \det \begin{bmatrix} e_i \\ e_j \\ e_k \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{123} = \det \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

مثال

ثابت کنید: $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqk} = \delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp}$

حل:

فرض میکنیم ماتریس های $[A], [B]$ به صورت زیر باشد، داریم:

$$\varepsilon_{ijk} = \det \begin{bmatrix} CV - \vec{e}_i \\ CV - \vec{e}_j \\ CV - \vec{e}_k \end{bmatrix} = \det [A]$$

$$\varepsilon_{pqk} = \det \begin{bmatrix} CV - \vec{e}_p \\ CV - \vec{e}_q \\ CV - \vec{e}_k \end{bmatrix} = \det [B]$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqk} = \det([A]) \det([B]) = \det([A]) \det([B]^T) \\ \det([AB]) = \det([A]) \det([B]) \end{array} \right\} \rightarrow \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqk} = \det([AB^T])$$

$$\rightarrow [AB^T] = \begin{bmatrix} CV - \vec{e}_i \\ CV - \vec{e}_j \\ CV - \vec{e}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} CV - \vec{e}_p & CV - \vec{e}_q & CV - \vec{e}_k \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow [AB^T] = \begin{bmatrix} \vec{e}_i \cdot \vec{e}_p & \vec{e}_i \cdot \vec{e}_q & \vec{e}_i \cdot \vec{e}_k \\ \vec{e}_j \cdot \vec{e}_p & \vec{e}_j \cdot \vec{e}_q & \vec{e}_j \cdot \vec{e}_k \\ \vec{e}_k \cdot \vec{e}_p & \vec{e}_k \cdot \vec{e}_q & \vec{e}_k \cdot \vec{e}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ik} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jk} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kk} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqk} = \det([AB^T]) = \det \begin{bmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ik} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jk} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & 3 \end{bmatrix}$$

به عنوان تمرین، دترمینان آخر را محاسبه کنید.