

جلسه سوم

تانسور

اگر از اثر نگاشت یا تبدیل مانند " T " بر روی برداری مانند $\vec{a}$ ، بردار دیگری به نام $\vec{b}$ خلق شود، آن گاه نمایش این تبدیل به صورت زیر است:

$$\vec{b} = T(\vec{a})$$

اگر این تبدیل دارای خواص زیر باشد به آن یک تبدیل خطی می گویند:

$$T(\vec{m} + \vec{n}) = T(\vec{m}) + T(\vec{n}) \quad \text{و یا} \quad T(\alpha \vec{m}) = \alpha T(\vec{m})$$

که در آن $\vec{m}, \vec{n}$ دلخواه و α اسکالر است.

- بررسی خطی بودن تبدیلی که اثرش روی هر بردار مانند $\vec{a}$ بردار ثابتی به نام $\vec{n}$ گردد:

$$\left. \begin{array}{l} T(\vec{a}) = \vec{n} \\ T(\vec{b}) = \vec{n} \end{array} \right\} \rightarrow \text{wether : } T(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{n} \quad \text{تناقض}$$

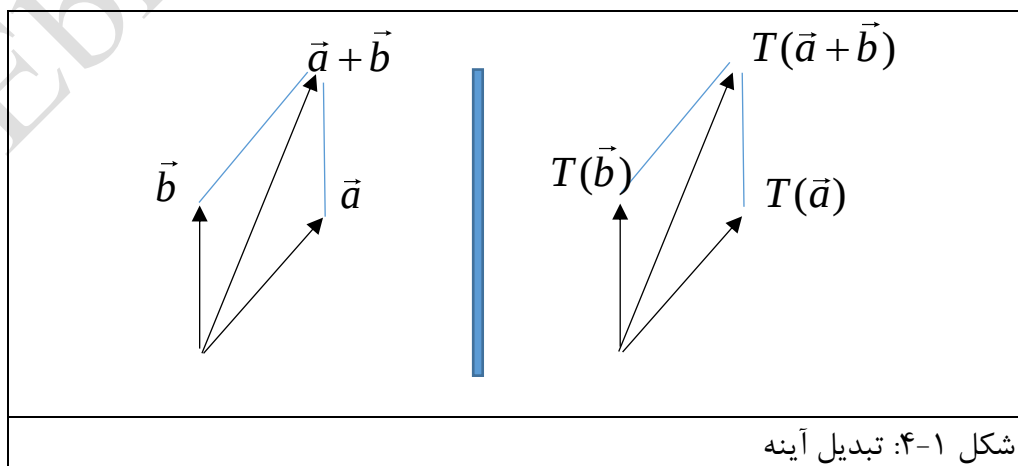
$$T(\vec{a} + \vec{b}) = T(\vec{a}) + T(\vec{b}) = 2\vec{n} \neq \vec{n} \rightarrow \text{Contradict}$$

- بررسی خط بودن نگاشتی که هر بردار را به K برابر آن تبدیل می کند:

$$T(\vec{a}) = K\vec{a}$$

$$T(\vec{m} + \vec{n}) = K(\vec{m} + \vec{n}) = K\vec{m} + K\vec{n} = T(\vec{m}) + T(\vec{n}) \quad \text{درست}$$

- بررسی خطی بودن تبدیلی که عملکردش همانند آینه باشد:

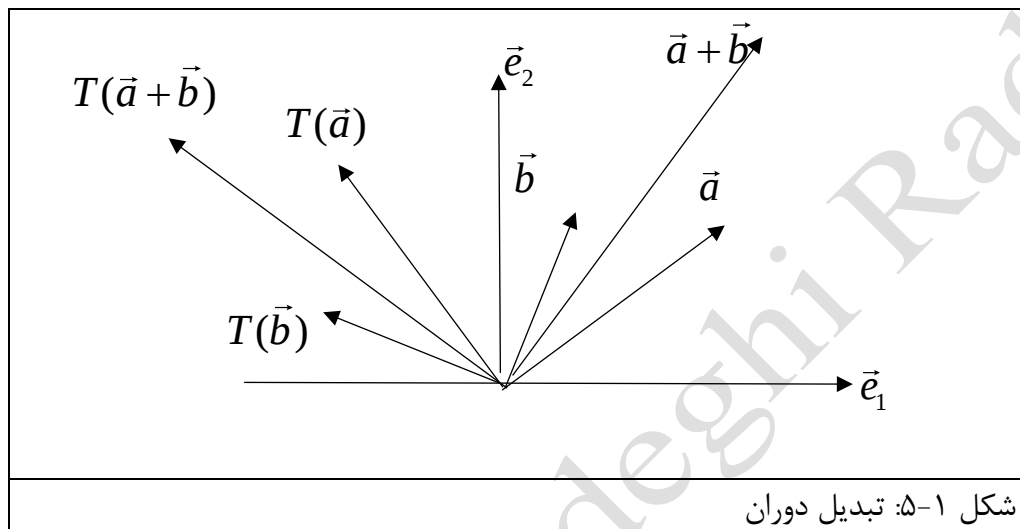


$$T(\vec{a} + \vec{b}) = T(\vec{a}) + T(\vec{b}) \quad \text{درست}$$

- بررسی خطی بودن تبدیل دوران:

برای معلوم بودن دوران ابتدا بایستی محور دوران و میزان چرخش برای ما مشخص باشد:

برای سادگی محور دوران را $\vec{e}_3$ و اندازه چرخش یا دوران را θ پاد ساعتگرد در نظر می گیریم



واضح است که:

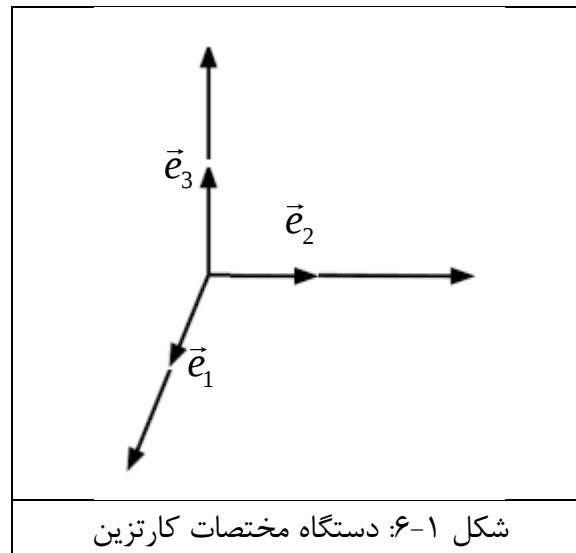
$$T(\vec{a} + \vec{b}) = T(\vec{a}) + T(\vec{b}) \quad \text{درست}$$

از اینجا به بعد به هر تبدیل خطی تعریف شده با $\vec{b} = T(\vec{a})$ یک تانسور مرتبه دوم گفته می شود در حقیقت اسکالر ها را تانسور از مرتبه صفر که تعداد مولفه ها $3^0 = 1$ و بردار را تانسور از مرتبه یک که تعداد مولفه های آن $3^1 = 3$ ، تبدیل ها خطی از نوع $\vec{b} = T(\vec{a})$ را تانسور مرتبه دوم و تعداد مولفه ها $3^2 = 9$ می نامیم

هر یک از مولفه های تانسور مرتبه دو دارای دو اندیس مانند T_{ij} می باشند در ادامه به سیمبل یک تانسور در این درس را با علامت اختصاری $\vec{T}$ نشان می دهیم.

مولفه های تانسور مرتبه دوم

می دانیم که تعیین مولفه های یک بردار بستگی به دستگاه مختصات انتخابی دارد و مشابه با مولفه های بردار تعیین مولفه های یک تانسور هم بدون انتخاب دستگاه مختصات امکان پذیر نیست ، در همین راستا در ابتدا دستگاه مختصات راستگرد به صورت زیر انتخاب می شود:



مولفه های بردار $\vec{a}$ در دستگاه مختصات بالا به شرح زیر است:

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 = a_i\vec{e}_i$$

اگر اثر تانسور مرتبه دوم $\vec{T}$ را بر روی بردار های یکه $\vec{e}_i$ به صورت زیر فرض نماییم:

$$\left. \begin{aligned} \vec{T}(\vec{e}_1) &= T_{11}\vec{e}_1 + T_{21}\vec{e}_2 + T_{31}\vec{e}_3 \\ \vec{T}(\vec{e}_2) &= T_{12}\vec{e}_1 + T_{22}\vec{e}_2 + T_{32}\vec{e}_3 \\ \vec{T}(\vec{e}_3) &= T_{13}\vec{e}_1 + T_{23}\vec{e}_2 + T_{33}\vec{e}_3 \end{aligned} \right\} \rightarrow \vec{T}(\vec{e}_i) = T_{ji}\vec{e}_j$$

به هر یک از ۹ پارامتر T_{ij} مولفه های تانسور $\vec{T}$ در دستگاه مختصات $\{\vec{e}_i\}$ گویند.

به چیدمان و آرایش مولفه های تانسور فوق در یک ظرف ماتریسی 3×3 به صورت زیر اصطلاحاً ماتریس متناظر با تانسور $\vec{T}$ در دستگاه یا قالب ماتریسی تانسور $\vec{T}$ در دستگاه $\{\vec{e}_i\}$ گویند.

$$[\vec{T}] = [\vec{T}\vec{e}_1 \quad \vec{T}\vec{e}_2 \quad \vec{T}\vec{e}_3] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

در ادامه سعی بر این است که به تعیین تک تک مولفه های تانسور $\vec{T}$ در دستگاه هایی مانند $\{\vec{e}_i\}$ بپردازیم.

می خواهیم برای بردار زیر اثر تانسور را دست آوریم:

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 = a_i\vec{e}_i$$

$$a_1 = \vec{a} \cdot \vec{e}_1 \quad \text{یا} \quad a_i = \vec{a} \cdot \vec{e}_i$$

داریم:

$$T_{11} = \vec{e}_1 \cdot \vec{T} \vec{e}_1$$

$$T_{21} = \vec{e}_2 \cdot \vec{T} \vec{e}_1$$

...

$$T_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{T} \vec{e}_j$$

مثال

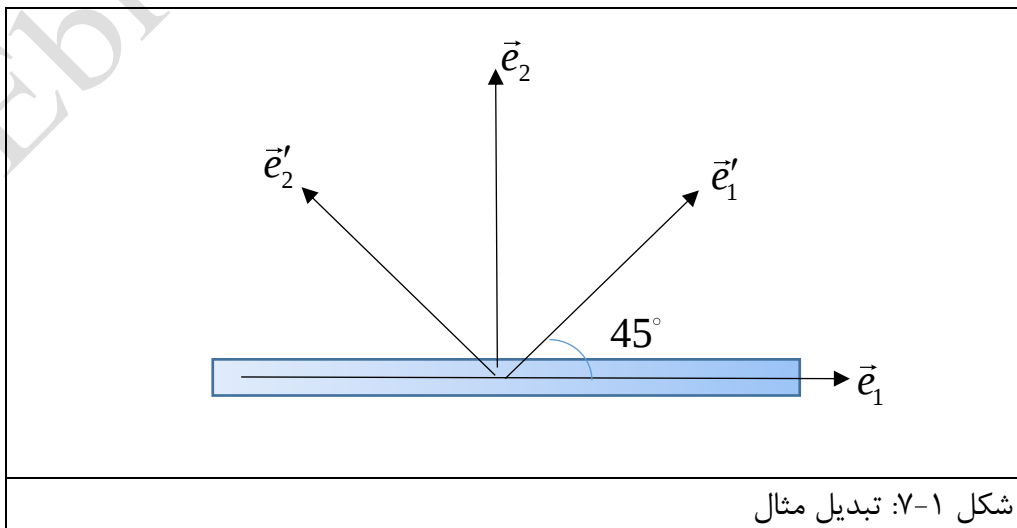
اگر اثر تانسور مرتبه دومی روی بردارهای یکه $\{\vec{e}_i\}$ به شرح زیر باشد مطلوب است قالب ماتریسی آن:

$$\left. \begin{aligned} \vec{T}(\vec{e}_1) &= 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_3 \\ \vec{T}(\vec{e}_2) &= -\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ \vec{T}(\vec{e}_3) &= \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} T_{12} = \vec{e}_1 \cdot (-\vec{e}_2 + \vec{e}_3) = 0 \\ \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \vec{T} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

مثال

مطلوب است مولفه های تانسور آئینه ای که نرمال آن $\vec{e}_2$ باشد در دستگاه نشان داده شده زیر:



ابتدا برای آینده داریم:

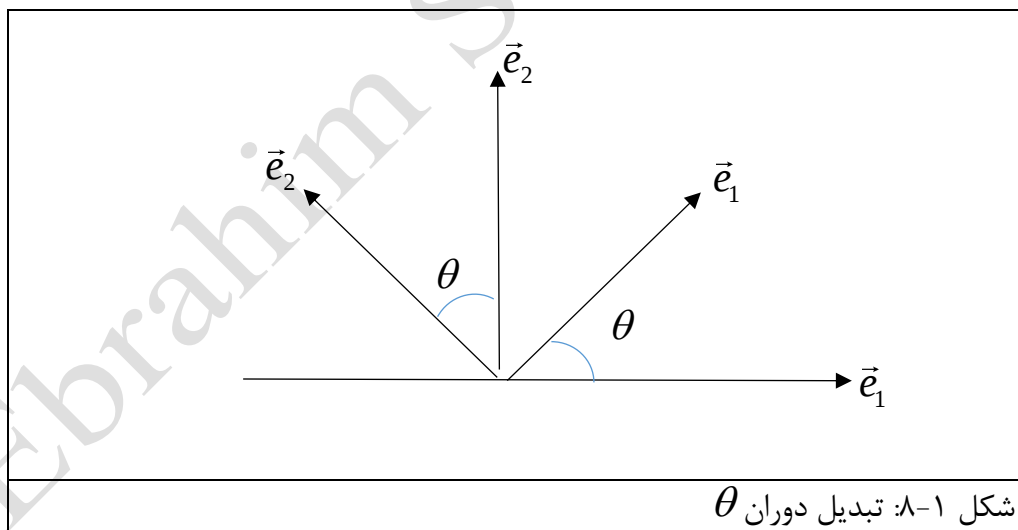
$$\left. \begin{aligned} \vec{T}(\vec{e}_1) &= \vec{e}_1 \\ \vec{T}(\vec{e}_2) &= -\vec{e}_2 \\ \vec{T}(\vec{e}_3) &= \vec{e}_3 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{T_{ij}=\vec{e}_i \cdot \vec{T}\vec{e}_j} [\vec{T}]_{\{\vec{e}_i\}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

و برای دستگاه جدید $\{\vec{e}'_i\}$ داریم:

$$\left. \begin{aligned} \vec{T}\vec{e}'_1 &= -\vec{e}'_2 \\ \vec{T}\vec{e}'_2 &= \vec{e}'_1 \\ \vec{T}\vec{e}'_3 &= \vec{e}'_3 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{T_{ij}=\vec{e}'_i \cdot \vec{T}\vec{e}'_j} [\vec{T}]_{\{\vec{e}'_i\}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال

مطلوبست تعیین مولفه ها و قالب ماترسی تانسور دوران که محور آن e_3 و اندازه دوران θ باشد:



$$\left. \begin{aligned} \vec{T}(\vec{e}_1) &= \cos \theta \vec{e}_1 + \sin \theta \vec{e}_2 \\ \vec{T}(\vec{e}_2) &= -\sin \theta \vec{e}_1 + \cos \theta \vec{e}_2 \\ \vec{T}(\vec{e}_3) &= \vec{e}_3 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{T_{ij}=\vec{e}_i \cdot \vec{T}\vec{e}_j} [\vec{T}]_{\{\vec{e}_i\}} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$