

جلسه پنجم

جمع دو تانسور

دو تانسور مانند $\vec{S}, \vec{T}$ در نظر بگیرید داریم:

$$\vec{D} = \vec{T} + \vec{S}$$

$$D_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{D} \vec{e}_j = \vec{e}_i \cdot (\vec{T} + \vec{S}) \vec{e}_j = \vec{e}_i \cdot \vec{T} \vec{e}_j + \vec{e}_i \cdot \vec{S} \vec{e}_j$$

$$D_{ij} = T_{ij} + S_{ij}$$

$$[\vec{D}] = [\vec{T}] + [\vec{S}]$$

ضرب تانسور

دو تانسور مانند $\vec{S}, \vec{T}$ در نظر بگیرید داریم:

$$\vec{T}\vec{S}(\vec{a}) = \vec{T}(\vec{S}(\vec{a})), \vec{S}\vec{T}(\vec{a}) = \vec{S}(\vec{T}(\vec{a})) \rightarrow \vec{T}\vec{S} \neq \vec{S}\vec{T}$$

با پذیرش تعریف بالا به تعیین مولفه های ضرب دو ماتریس می پردازیم:

$$\vec{K} = \vec{T}\vec{S}$$

$$K_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{K} \vec{e}_j = \vec{e}_i \cdot \vec{T}\vec{S} \vec{e}_j = \vec{e}_i \cdot \vec{T}(\vec{S}(\vec{e}_j)) \stackrel{\vec{T}\vec{e}_i = T_{ij}\vec{e}_j}{=} =$$

$$\vec{e}_i \cdot \vec{T}(S_{mj}\vec{e}_m) = S_{mj}\vec{e}_i \cdot \vec{T}\vec{e}_m \stackrel{T_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{T}\vec{e}_j}{=} = S_{mj}T_{im} = T_{im}S_{mj}$$

در نتیجه قالب ماتریسی برابر می شود با:

$$[\vec{T}\vec{S}] = [\vec{T}][\vec{S}]$$

ترانهاده یک تانسور

ترانهاده ($\vec{T}$ Transpose) را با $\vec{T}^T$ نشان می دهند و نوع عمل گری آن به صورت زیر تعریف می شود:

$$\vec{a} \cdot \vec{T} \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{T}^T \vec{a}$$

ثابت کنید که ترانهاده یک ماتریس یک تبدیل خطی است:

$$\vec{T}^T (\alpha \vec{m} + \beta \vec{n}) \stackrel{?}{=} \alpha \vec{T}^T \vec{m} + \beta \vec{T}^T \vec{n}$$

کافیست در رابطه تعریف شده ترانهاده به جای $\vec{a}$ عبارت $\alpha \vec{m} + \beta \vec{n}$ قرار دهیم:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{T} \vec{b} &= \vec{b} \cdot \vec{T}^T \vec{a} \xrightarrow{a=\alpha \vec{m} + \beta \vec{n}} (\alpha \vec{m} + \beta \vec{n}) \cdot \vec{T} \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{T}^T (\alpha \vec{m} + \beta \vec{n}) \rightarrow \\ (\alpha \vec{b} \cdot \vec{T} \vec{m}) + (\beta \vec{b} \cdot \vec{T} \vec{n}) &= \vec{b} \cdot \vec{T}^T (\alpha \vec{m} + \beta \vec{n}) \\ \rightarrow (\alpha \vec{T} \vec{m}) + (\beta \vec{T} \vec{n}) &= \vec{T}^T (\alpha \vec{m} + \beta \vec{n}) \end{aligned}$$

مولفه های ترانهاده یک تانسور

$$(\vec{T}^T)_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{T}^T \vec{e}_j = \vec{e}_j \cdot \vec{T} \vec{e}_i = T_{ji}$$

$$[\vec{T}^T] = [\vec{T}]^T$$

$$(ABC...Z)^T = Z^T ... C^T B^T A^T$$

$$(\vec{S} \vec{T})^T = \vec{T}^T \vec{S}^T \quad \text{ثابت کنید}$$

حل:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{S} \vec{T}) \vec{b} &= \vec{b} \cdot (\vec{S} \vec{T})^T \vec{a} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{S} (\vec{T} \vec{b}) = \vec{T} \vec{b} \cdot \vec{S}^T \vec{a} = \vec{S}^T \vec{a} \cdot \vec{T} \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{T}^T \vec{S}^T \vec{a} \\ \rightarrow (\vec{S} \vec{T})^T &= \vec{T}^T \vec{S}^T \end{aligned}$$

ضرب دایادیک (*Dyadic – product*) دو بردار:

نوعی تبدیل است و برای دو بردار مانند $\vec{a}, \vec{b}$ آنرا با $\vec{a} \otimes \vec{b}$ نشان می دهند و عملگری و اثر آن به صورت زیر تعریف می شود:

$$(\vec{a} \otimes \vec{b})(\vec{c}) = \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

در ابتدا ثابت می شود این نوع تبدیل خطی است:

$$\begin{aligned}
 (\vec{a} \otimes \vec{b})(\alpha \vec{m} + \beta \vec{n}) &= \alpha (\vec{a} \otimes \vec{b})\vec{m} + \beta (\vec{a} \otimes \vec{b})\vec{n} \rightarrow \\
 \vec{a}(\vec{b} \cdot (\alpha \vec{m} + \beta \vec{n})) &= \vec{a}(\alpha \vec{b} \cdot \vec{m} + \beta \vec{b} \cdot \vec{n}) = (\alpha \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{m}) + \beta \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{n})) \\
 &= \alpha (\vec{a} \otimes \vec{b})\vec{m} + \beta (\vec{a} \otimes \vec{b})\vec{n}
 \end{aligned}$$

در نتیجه ضربه فوق را یک تبدیل خطی و به تبع آن یک تانسور مرتبه دوم می نامند.

تعیین مولفه های تانسور $\vec{a} \otimes \vec{b}$

$$\vec{K} = \vec{a} \otimes \vec{b}$$

$$K_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{K} \vec{e}_j = \vec{e}_i \cdot (\vec{a} \otimes \vec{b})(\vec{e}_j) = \vec{e}_i \cdot (\vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{e}_j)) = \vec{e}_i \cdot (\vec{a}(b_j)) = b_j \vec{e}_i \cdot \vec{a} = b_j a_i = a_i b_j$$

$$\rightarrow [\vec{a} \otimes \vec{b}] = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

$$[\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, [\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \dots$$

اما می توان قالب ماتریسی هر تانسور مانند $\vec{T}$ را به شکل زیر بازنویسی کرد

$$[\vec{T}] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} = T_{11} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + T_{12} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \dots$$

$$[\vec{T}] = T_{11} [\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1] + T_{12} [\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2] + \dots$$

$$\rightarrow \vec{T} = T_{11} \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + T_{12} \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 + \dots = T_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$$

تانسور واحد

آن را با نماد $\vec{I}$ نشان می دهند و اثر آن روی هر بردار دلخواه برابر با خود آن بردار است:

$$\vec{I}\vec{a} = \vec{a}$$

مولفه های این تانسور عبارتند از:

$$I_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{I} \vec{e}_j = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$$

$$[\vec{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{I} = I_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \delta_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \vec{e}_j \otimes \vec{e}_j$$

معکوس تانسور (Inverse)

تانسور $\vec{S}$ را معکوس تانسور $\vec{T}$ می نامیم هرگاه روابط زیر برقرار باشد:

$$\vec{S} \vec{T} = \vec{T} \vec{S} = \vec{I} \rightarrow T = S^{-1}$$

در اینجا معکوس تانسوری مانند $\vec{T}$ را با $\vec{T}^{-1}$ نشان می دهند

$$\vec{T}^{-1} \vec{T} = \vec{T} \vec{T}^{-1} = \vec{I} \rightarrow [\vec{T}][\vec{T}^{-1}] = [\vec{I}] \rightarrow [\vec{T}]^{-1} = [\vec{T}^{-1}]$$