

جلسه ششم

ثابت کنید: $(\vec{A}\vec{B})^{-1} = \vec{B}^{-1}\vec{A}^{-1}$

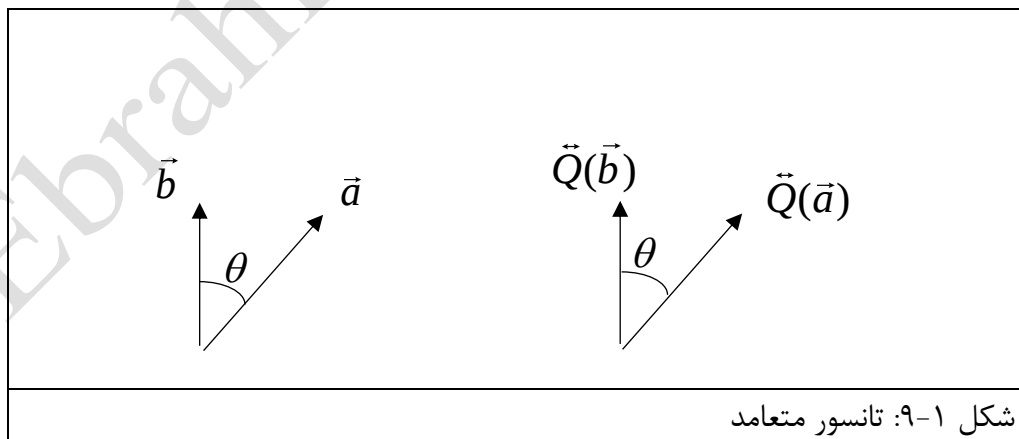
$$\begin{aligned} (\vec{A}\vec{B})^{-1}(\vec{A}\vec{B}) &= I \xrightarrow{\vec{A}^{-1}} \vec{A}^{-1}(\vec{A}\vec{B})(\vec{A}\vec{B})^{-1} = (\vec{A}^{-1}\vec{I}) \\ &\xrightarrow{\vec{B}^{-1}} \vec{B}^{-1}\vec{A}^{-1}(\vec{A}\vec{B})(\vec{A}\vec{B})^{-1} = \vec{B}^{-1}\vec{A}^{-1} \rightarrow \vec{B}^{-1}(\vec{A}^{-1}\vec{A})\vec{B}(\vec{A}\vec{B})^{-1} = \vec{B}^{-1}\vec{A}^{-1} \\ &\rightarrow \vec{B}^{-1}\vec{I}\vec{B}(\vec{A}\vec{B})^{-1} = \vec{B}^{-1}\vec{A}^{-1} \rightarrow \vec{B}^{-1}\vec{B}(\vec{A}\vec{B})^{-1} = \vec{B}^{-1}\vec{A}^{-1} \\ &\rightarrow (\vec{B}^{-1}\vec{B})(\vec{A}\vec{B})^{-1} = \vec{B}^{-1}\vec{A}^{-1} \rightarrow I(\vec{A}\vec{B})^{-1} = \vec{B}^{-1}\vec{A}^{-1} \rightarrow (\vec{A}\vec{B})^{-1} = \vec{B}^{-1}\vec{A}^{-1} \end{aligned}$$

تانسورهای متعامد (orthogonal – tensor)

بردارهای $\vec{a}, \vec{b}$ را در نظر بگیرید، تبدیلی (Q) که ضمن حفظ اندازه این دو بردار، زاویه بین آنها را نیز حفظ کند، تانسور متعامد نامیده می شود. داریم:

$$1: |\vec{a}| = |\vec{Q}\vec{a}|, |\vec{b}| = |\vec{Q}\vec{b}|$$

$$2: \vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{Q}\vec{a}) \cdot (\vec{Q}\vec{b})$$



و همچنین می توان نوشت:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{Q}\vec{a}) \cdot (\vec{Q}\vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{Q}^T \vec{Q} \vec{b} \rightarrow \vec{Q}^T \vec{Q} = \vec{I} \rightarrow \vec{Q}^T = \vec{Q}^{-1}$$

و موله های آن به شرح زیر اند:

$$\vec{Q}^T \vec{Q} = \vec{I} \rightarrow (\vec{Q}^T \vec{Q})_{ij} = \vec{Q}_{im}^T \vec{Q}_{mj} = \vec{Q}_{mi} \vec{Q}_{mj} = I_{ij} = \delta_{ij}$$

ویژگی دیگر تانسور متعامد به شرح زیر است:

$$\vec{Q}^T \vec{Q} = I$$

$$[\vec{Q}]^T [\vec{Q}] = [\vec{I}] \rightarrow (\det[\vec{Q}])^2 = 1 \rightarrow \det[\vec{Q}] = \pm 1$$

عملگر تریس (Trace)

عملگر تریس را با tr نشان می دهند و عملگری آن به شرح زیر است:

$$tr(\vec{a} \otimes \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$tr(\alpha \vec{T}) = \alpha tr(\vec{T})$$

$$tr(\vec{a} \otimes \vec{b} \otimes \vec{c}) = \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

اثر آن روی تانسور $\vec{T}$ به شرح زیر است:

همچنین رابطه زیر برقرار است:

$$tr(\vec{A}\vec{B}) = tr(\vec{B}\vec{A})$$

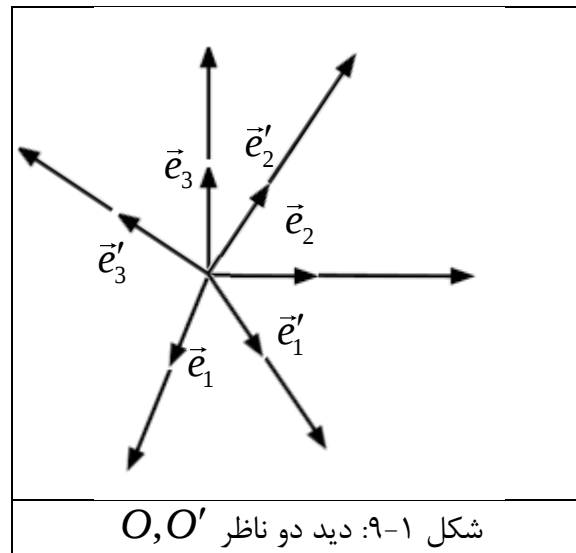
بیان مولفه های برداری و تانسوری از دید دو ناظر در نقاط O, O' :

برای برداری چون $\vec{a}$ داریم:

$$a_i = \vec{a} \cdot \vec{e}_i, a'_i = \vec{a} \cdot \vec{e}'_i$$

$$a'_i = Q_{mi} a_m, a_i = Q_{im} a'_m$$

$$[a]' = [Q]^T [a]$$



بردار های یکه دو دستگاه با تانسور متعامدی چون $\vec{Q}$ قابل تبدیل به یکدیگرند:

$$\begin{aligned} \vec{e}'_i &= \vec{Q} \vec{e}_i \\ [\vec{Q}]_{\{e_i\}} &= [\vec{Q} \vec{e}_1 \quad \vec{Q} \vec{e}_2 \quad \vec{Q} \vec{e}_3] \\ &= \begin{bmatrix} \vec{e}'_1 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}'_2 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}'_3 \cdot \vec{e}_1 \\ \vec{e}'_1 \cdot \vec{e}_2 & \dots & \dots \\ \vec{e}'_1 \cdot \vec{e}_3 & \dots & \dots \end{bmatrix} \end{aligned}$$