

جلسه هفتم

بردار های ویژه یک تانسور

همانطور که در مقاومت یک و دو و اجزا ماشین یک ذکر شد می توان مقادیر تانسور تنش را در دستگاهی دیگر به شکل زیر نوشت

$$[\vec{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

اگر برداری مانند $\vec{n}$ یافت شود که اثر تانسور $\vec{T}$ روی آن به صورت ضربی از بردار گردد، آنگاه به $\vec{n}$ بردار ویژه تانسور و مضرب را نیز مقدار ویژه متناظر با بردار می نامند

$$\vec{T}\vec{n} = \lambda\vec{n} = \lambda\vec{I}\vec{n} \rightarrow \vec{T}\vec{n} - \lambda\vec{I}\vec{n} = 0 \rightarrow (\vec{T} - \lambda\vec{I})\vec{n} = 0$$

$$\det[\vec{T} - \lambda\vec{I}] = 0 \rightarrow \lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0$$

$$I_1 = \text{tr}(\vec{T}) = T_{ii}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ji}) = \frac{1}{2}((\text{tr}(\vec{T}))^2 - \text{tr}(\vec{T}^2))$$

$$I_3 = \det[\vec{T}]$$

مثال: اگر قالب ماتریسی تانسور $\vec{T}$ به شکل زیر باشد، مقادیر ویژه آن و بردار های یکه متناظر را بیابید:

$$[\vec{T}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow [\vec{T} - \lambda\vec{I}] = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & -3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det[\vec{T} - \lambda\vec{I}] = 0$$

$$\rightarrow \det[\vec{T} - \lambda \vec{I}] = (-1)^2 (2 - \lambda) (\{(3 - \lambda) * (-3 - \lambda)\} - \{4 * 4\}) + 0 + 0$$

$$\rightarrow \det[\vec{T} - \lambda \vec{I}] = (2 - \lambda) \{\lambda^2 - 25\} = 0 \rightarrow \lambda = 2, \lambda = \pm 5$$

$$(\vec{T} - \lambda \vec{I}) \vec{n} = 0 \rightarrow [\vec{T} - 2\vec{I}] [\vec{n}] = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} n_2 + 4n_3 = 0 \\ 4n_2 - 5n_3 = 0 \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \end{cases} \rightarrow n_2 = n_3 = 0, n_1 = \pm 1 \rightarrow \vec{n} = \pm \vec{e}_1$$