جلسه هشتم

تعریف تانسور متقارن $(Symetric)$

تانسور $\vec{\vec{T}}$ متقارن می نامیم هر گاه $\vec{\vec{T}}^{T} = \vec{\vec{T}}$ باشد.

$$T_{ij}^{T} = T_{ij} \rightarrow T_{ij} = T_{ji}$$

تعامد بردارهای یکه ویژه تانسور متقارن $\vec{\vec{T}}$

$$\vec{n}_3, \vec{n}_2, \vec{n}_1$$

$$\vec{\vec{T}}$$

$$\lambda_3, \lambda_2, \lambda_1$$

$$\vec{\vec{T}}\vec{n}_1 = \lambda_1 \vec{n}_1 \xrightarrow{.n_2} \vec{n}_2.\vec{\vec{T}}\vec{n}_1 = \lambda_1 \vec{n}_2.\vec{n}_1 \quad I$$

$$\vec{\vec{T}}\vec{n}_2 = \lambda_2 \vec{n}_2 \xrightarrow{.n_1} \vec{n}_1.\vec{\vec{T}}\vec{n}_2 = \lambda_2 \vec{n}_1.\vec{n}_2 \quad II$$

$$\vec{\vec{T}}\vec{n}_3 = \lambda_3 \vec{n}_3$$

$$\vec{\vec{T}}^{T} = \vec{\vec{T}} \rightarrow \vec{n}_1.\vec{\vec{T}}\vec{n}_2 = \vec{n}_2.\vec{\vec{T}}^{T}\vec{n}_1 = \vec{n}_2.\vec{\vec{T}}\vec{n}_1$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}_2.\vec{\vec{T}}\vec{n}_1 = \lambda_1 \vec{n}_2.\vec{n}_1 \\ \vec{n}_2.\vec{\vec{T}}\vec{n}_1 = \lambda_2 \vec{n}_1.\vec{n}_2 \end{array}\right\} \xrightarrow{-} (\vec{n}_1.\vec{n}_2)(\lambda_1 - \lambda_2) = 0$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 \neq \lambda_2 \rightarrow \vec{n}_1.\vec{n}_2 = 0 \rightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{\vec{T}}\vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_1 \\ \vec{\vec{T}}\vec{n}_2 = \lambda \vec{n}_2 \end{array} \right. \rightarrow \vec{\vec{T}}(\alpha \vec{n}_1 + \beta \vec{n}_2) = \alpha \vec{\vec{T}}\vec{n}_1 + \beta \vec{\vec{T}}\vec{n}_2 \end{array} \right.$$

$$\rightarrow \alpha\lambda\vec{n}_1 + \beta\lambda\vec{n}_2 = \lambda(\alpha\vec{n}_1 + \beta\vec{n}_2)$$

بی شمار ترکیب خطی از n_2, n_1 وجود دارد که در رابطه بالا صادق باشد

نتیجه می شود که هر ترکیب خطی از n_2, n_1 در این حالت (ریشه های تکراری) برداری ویژه برای این تانسور تلقی می شود، ما می توانیم از این بی شمار بردار، آن دو بردار عمود بر هم را به عنوان بردار های ویژه تانسور متناظر با مقادیر تکرار $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ انتخاب کینم وداریم:

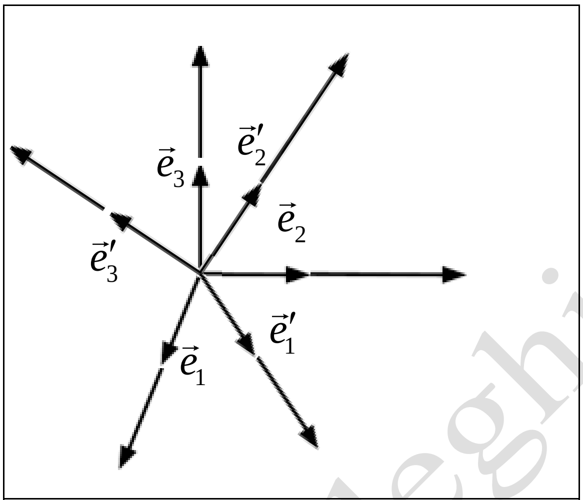
$$\rightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$$

مثال

ثابت کنیدمولفه های قطری تانسور $\vec{\vec{T}}$ در بازه $\lambda_1-\lambda_3$ قرار دارند

حل:

دستگاه مختصات اصلی n_i و دستگاهی دلخواه مثل n'_i در نظر بگیرید



شکل ۱-۱۱: دستگاه مختصات اصلی n_i و دستگاهی دلخواه مثل n'_i

مولفه های قطری تانسور $\vec{\vec{T}}$ در دستگاه پرایم به شرح زیر است:

$$
\begin{aligned}
&T'_{11}=\vec{n}'_1.\vec{\vec{T}}\vec{n}'_1\\
&\vec{n}'_1=\alpha\vec{n}_1+\beta\vec{n}_2+\gamma\vec{n}_3\\
&\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1\\
&T'_{11}=\left(\alpha\vec{n}_1+\beta\vec{n}_2+\gamma\vec{n}_3\right).\vec{\vec{T}}\left(\alpha\vec{n}_1+\beta\vec{n}_2+\gamma\vec{n}_3\right)=\\
&\left(\alpha\vec{n}_1+\beta\vec{n}_2+\gamma\vec{n}_3\right).\left(\alpha\lambda_1\vec{n}_1+\beta\lambda_2\vec{n}_2+\gamma\lambda_3\vec{n}_3\right)=\alpha^2\lambda_1+\beta^2\lambda_2+\gamma^2\lambda_3\\
&\alpha^2\lambda_1+\beta^2\lambda_1+\gamma^2\lambda_1\le T'_{11}=\alpha^2\lambda_1+\beta^2\lambda_2+\gamma^2\lambda_3\le\alpha^2\lambda_3+\beta^2\lambda_3+\gamma^2\lambda_3\rightarrow
\end{aligned}
$$

به عبارت دیگر $\max,\min$ مولفه های قطری تانسور $\vec{\vec{T}}$ در دستگاه اصلی اش رخ می دهد.