

جلسه اول

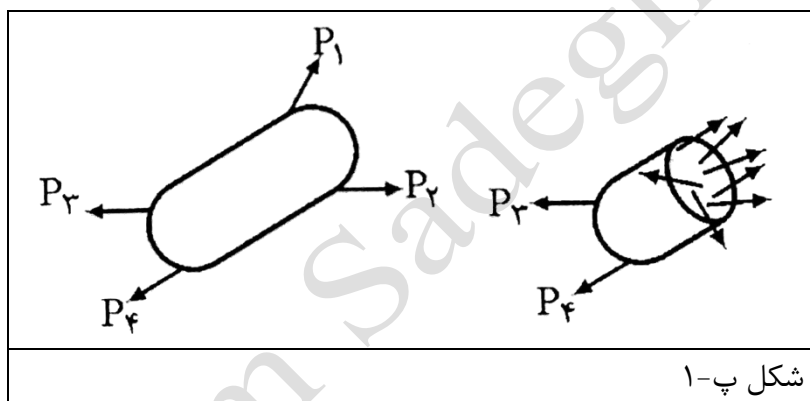
پیش نیاز

خلاصه ای از مقاومت مصالح و طراحی اجزا:

مقاومت مصالح شاخه‌ای از علوم مهندسی می‌باشد که به بررسی رفتار اجسام جامد در مقابل بارگذاری‌های مختلف می‌پردازد این رفتار عمدتاً شامل تغییر شکل‌ها و عکس‌العمل‌های داخلی اجسام می‌باشد

تنش :

شدت نیروهای عکس‌العمل داخل جسم جامد به واحد سطح تنش نامیده می‌شود. به عبارت دیگر اگر جسمی تحت نیروهای خارجی قرار گیرد عکس‌العمل هر مقطع از جسم در مقابل نیروهای خارجی به صورت بار گسترده‌ای به روی سطح مقطع می‌باشد شدت این بار به واحد سطح در هر نقطه از سطح مقطع را تنش در آن نقطه از مقطع می‌باشد.



شکل پ-۱

واحد تنش :

در SI واحد تنش نیوتن بر مترمربع $\frac{N}{m^2}$ یا پاسکال Pa می‌باشد

در سیستم انگلیسی واحد تنش بر حسب $\frac{lb}{in^2}$ پوند بر اینچ مربع تعریف شده است که با Psi نشان داده می‌شود و هر $1000 Psi$ ، $1 Ksi$ می‌باشد.

تنش عمودی :

تنش عمودی بر سطح را تنش عمودی نرمال یا محوری می‌نامند و با علامت σ (سیگما) نشان داده می‌شود.

تنش برشی :

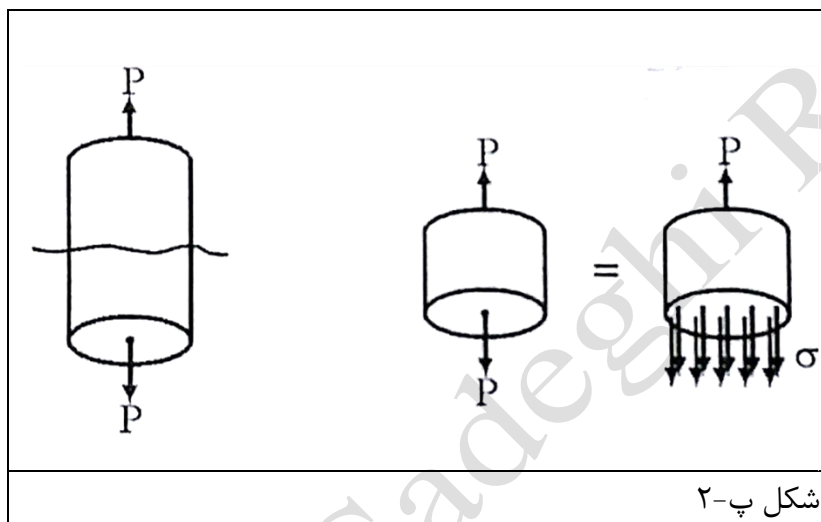
تنش مماس بر سطح را تنش برشی می‌نامند و با حرف τ مشخص می‌کنند

نیروی محوری :

به آینه نیروهای عمود بر سطح در یک مقطع نیروی محوری نامیده می‌شوند.

نکته : شرط لازم برای توزیع یکنواخت تنش محوری در مقطع ای از جنس واحد که تحت نیروی محوری P

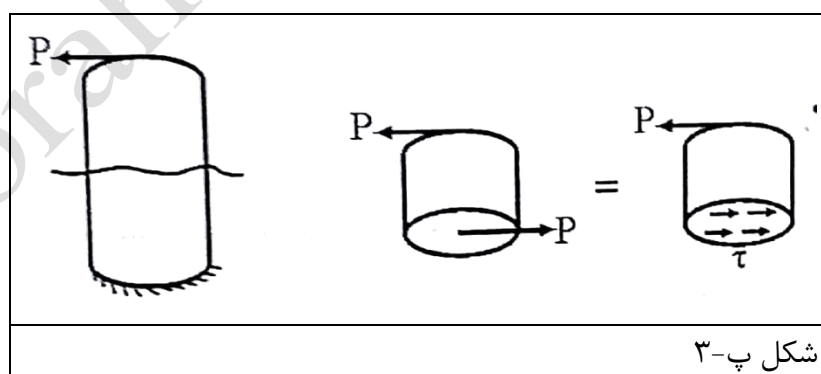
واحد شده است این است که نیرو از مرکز سطح مقطع عبور کند در این حالت تنش برابر است با $\sigma = \frac{P}{A}$



تنش برشی متوسط (میانگین) : اگر مقطعی به مساحت A تحت نیروی برشی P واقع شود تنش برشی

$$\tau = \frac{P}{A}$$

متوسط برابر است با :



کرنش و تغییر مکان

کرنش مهندسی:

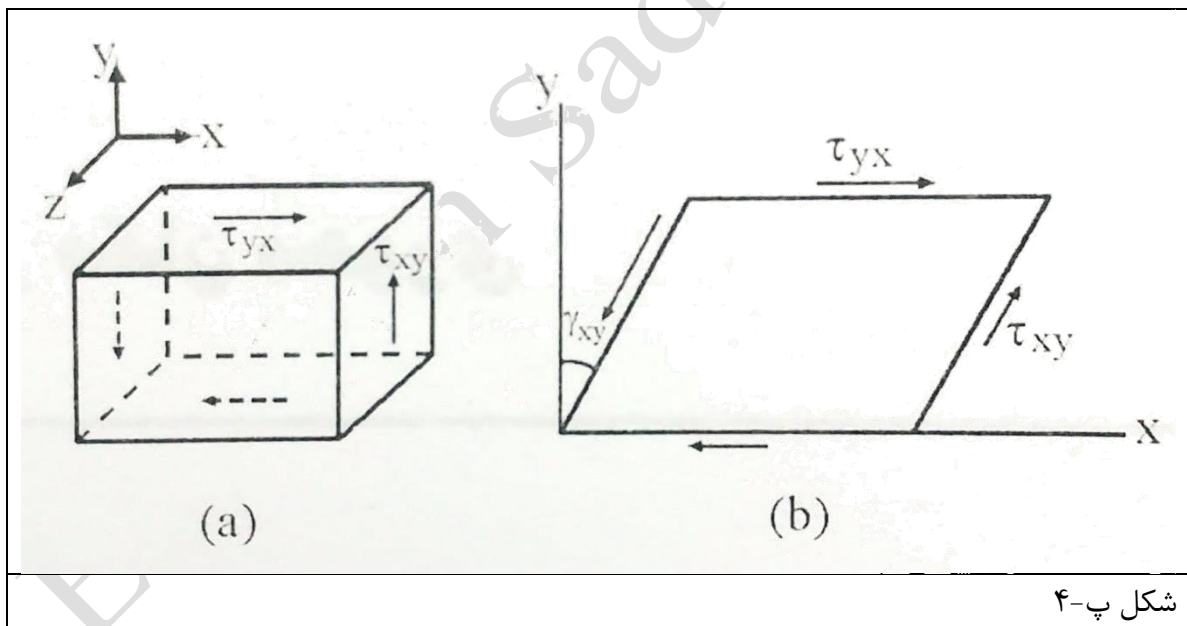
اگر فاصله دونقطه بر روی قطعه‌ای L_0 باشد و پس از بارگذاری این فاصله L شود کرنش مهندسی به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{\delta}{L_0}$$

وقتی که δ خیلی کوچک‌تر از L_0 باشد ($\delta \ll L_0$)

کرنش برشی:

تغییر شکل المانی مکعب شکل که تحت تنش برشی واقع شده است به صورت شکل زیر در نظر بگیرید :



برای تغییر شکل‌های کوچک γ_{xy} کرنش برشی در صفحه $X-Y$ تعریف می‌شود و با واحد رادیان سنجیده می‌شود.

در صفحات $X-Z$ و $Y-Z$ به ترتیب کرنش‌های برشی را با γ_{xz} و γ_{yz} نشان می‌دهند.

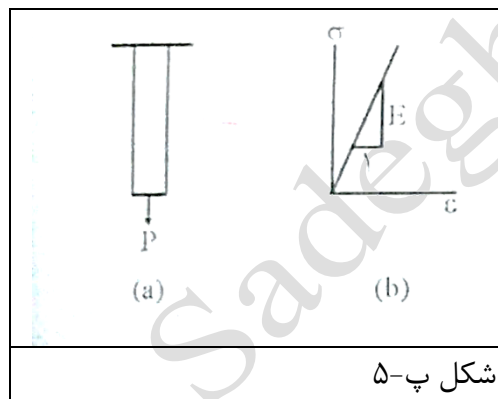
کرنش حرارتی:

اگر فاصله دونقطه از جسم L باشد با اعمال تغییر دما ΔT طول جسم به اندازه $\delta = \alpha L \Delta T$ تغییر خواهد کرد که در آن α ضریب انبساط حرارتی می باشد پس داریم:

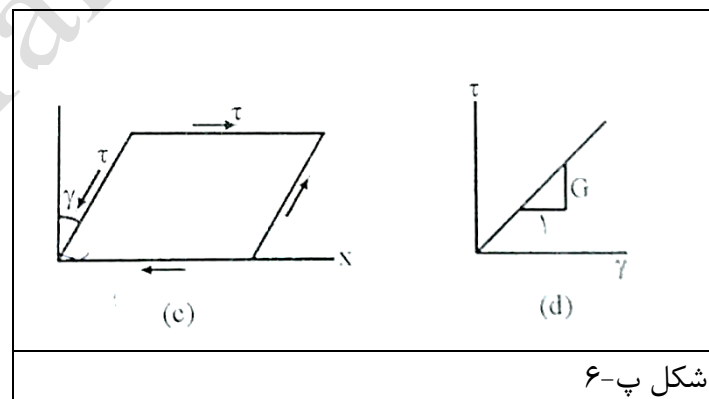
$$\varepsilon_T = \frac{\delta}{L} = \frac{\alpha L \Delta T}{L} \rightarrow \varepsilon_T = \alpha \Delta T$$

قانون هوک:

در تغییر مکان های کوچک رابطه تنش و کرنش اکثر مواد خطی می باشد و به صورت $\sigma = E \varepsilon$ تعریف می گردد یعنی تنش با ضریب E که مدول الاستیسیته نامیده می شود با کرنش متناسب است.

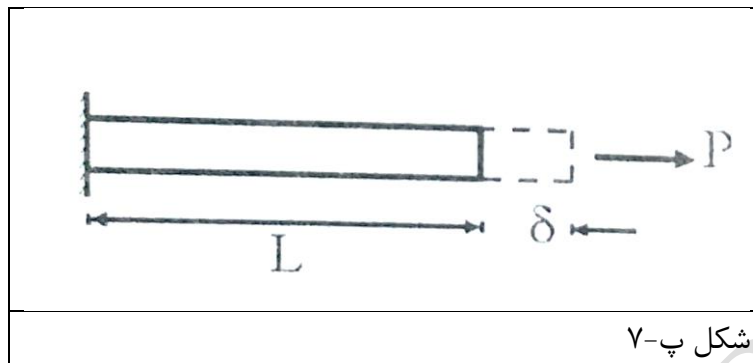


همچنین اگر المانی تحت کرنش قرار گیرد رابطه ی بین تنش برشی با کرنش برشی به صورت $\tau = G \gamma$ می باشد که در آن G مدول برشی است.



تغییر مکان محوری:

میله‌ای با سطح A که تحت بار P قرار دارد در نظر بگیرید داریم:

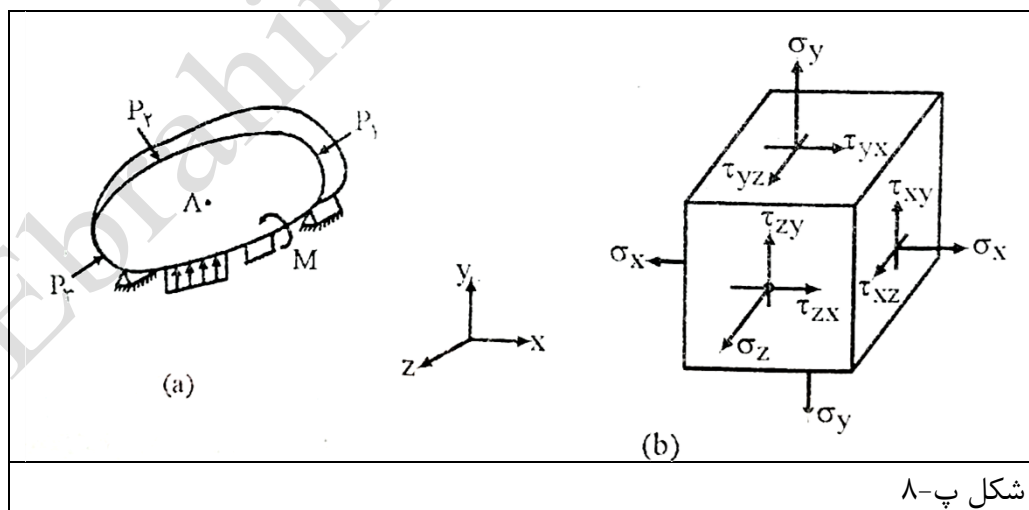


$$\sigma = E \varepsilon \rightarrow \frac{P}{A} = E \frac{\delta}{L} \rightarrow \delta = \frac{PL}{AE} = \frac{\sigma L}{E}$$

تانسور تنش:

در شکل نشان داده شده، تنش‌های عمودی با $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ مشخص شده‌اند، در تنش برشی τ_{ij} ، اندیس i نشان محور عمود بر صفحه است و اندیس j جهت تنش در صفحه را معین می‌کند و داریم

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}$$

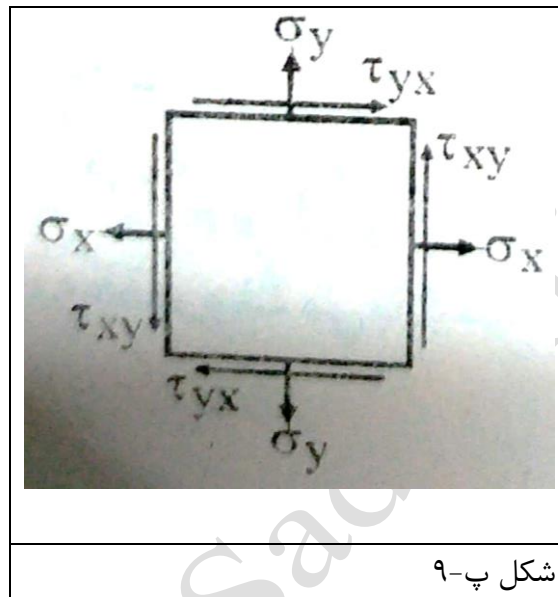


تنش‌های وارد بر یک المان را می‌توان به صورت ماتریس زیر نمایش داد که به آن تانسور تنش می‌گویند

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

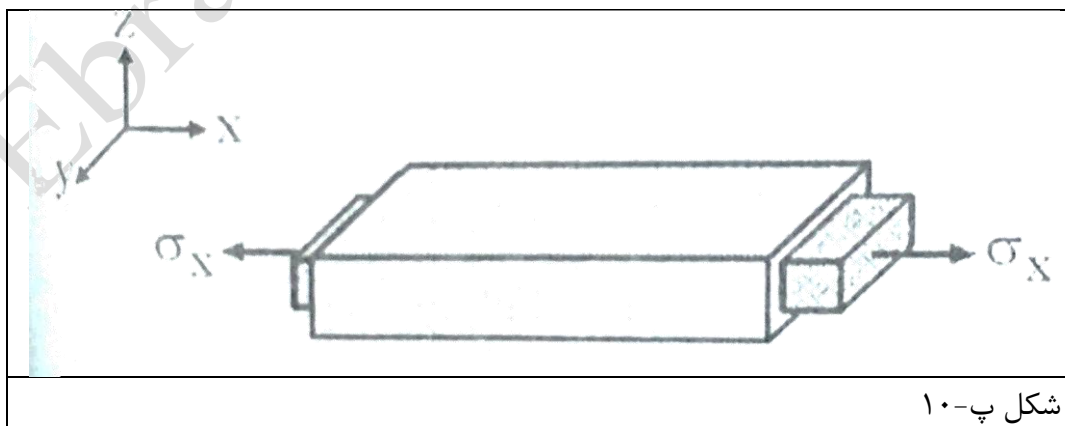
جهت نرمال →
جهت تنش ↓

در حالت دوبعدی در صفحه $x - y$ داریم:



$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}, \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$$

ضریب پواسون (ν):

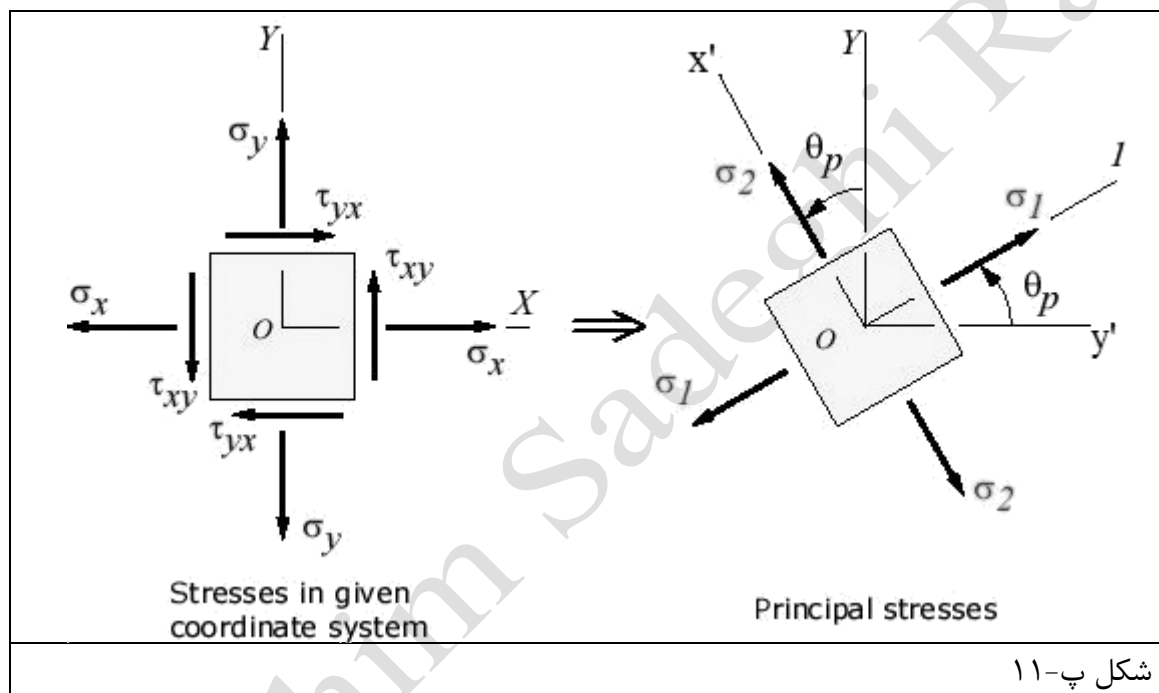


$$\nu = \left| \frac{korneshe - janebi}{korneshe - tooli} \right|, \nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \rightarrow \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$$

تبدیل تنش:

در حالت دو بعدی در صفحه $X - Y$ جهاتی را که در آن تنش σ'_x و σ'_y ماکزیمم یا مینیموم گرد، جهات اصلی تنس نامیده می شوند و مقادیر تنش در آن جهات را تنش های اصلی σ_1 و σ_2 می نامند که با فرمول زیر محاسبه می شوند:



شکل پ-۱۱

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

در سایر صفحات کفایت تنش های مربوط به همان صفحه ها را جایگذاری کنیم.

روش انرژی

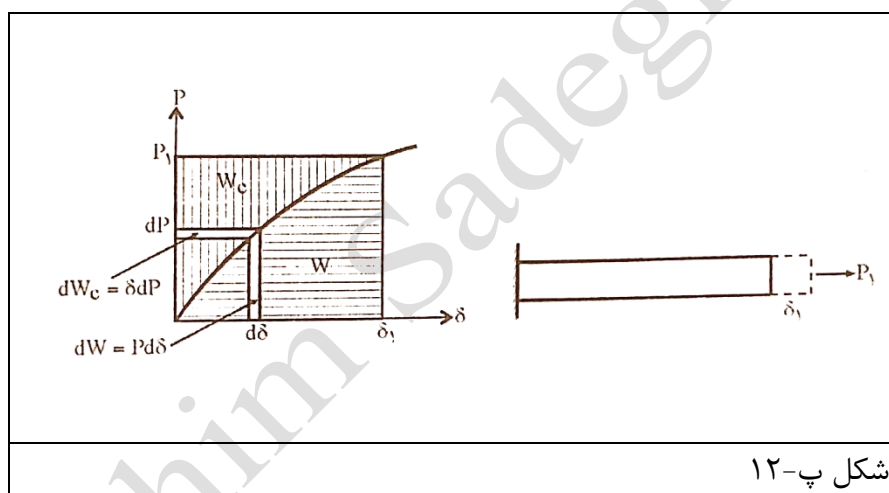
در اثر اعمال عوامل خارجی بر روی جسم و تغییر شکل آن توسط عواملی چون نیرو و یا گشتاور و ایجاد تغییر مکان یا دوران نقاط تحت اثر نیرو و گشتاور خارجی، بر روی جسم کار انجام می شود.

اگر جسم از ماده الاستیک ساخته شده باشد و کار انجام شده روی آن منجر به تغییر شکل گردد، این کار بصورت انرژی داخلی که انرژی کرنشی نامیده می شود در آن ذخیره می گردد و داریم:

$$U=W$$

که در آن U انرژی داخلی ذخیره شده و W کار انجام شده می باشد.

میله زیر را در نظر بگیرید که در اثر اعمال نیروی P نهایتاً به اندازه δ_1 تغییر مکان می دهد. کار انجام شده یا به عبارتی انرژی ذخیره شده در میله عبارت است از:



$$W = \int_0^{\delta_1} P d\delta$$

که برابر است با سطح زیر منحنی $P - \delta$ (نیرو - تغییر مکان) در فاصله 0 تا δ_1 .

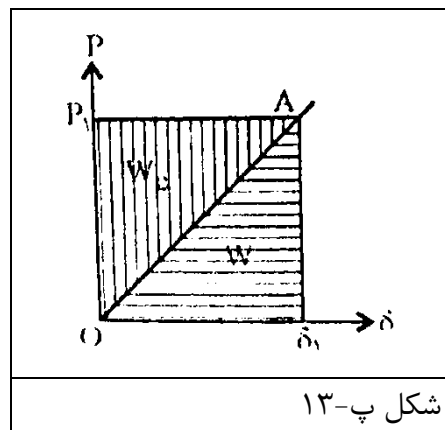
نوع دیگری از کار که کار متمم نامیده می شود بنابر تعریف برابر است با:

$$W_C = \int_0^{P_1} \delta dP$$

که برابر است با سطح محصور منحنی نیرو - تغییر مکان در فاصله 0 تا P_1 .

در صورتی که رابطه بین نیرو و تغییر مکان خطی باشد مقدار کار و کار متمم برابرند یعنی :

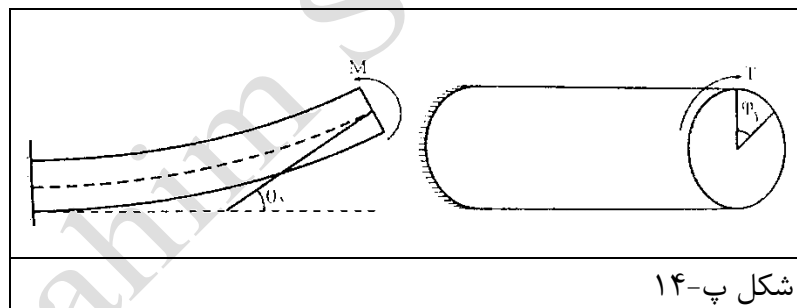
$$W = W_C = \frac{1}{2} P_1 \delta_1$$



به همین صورت برای میله های تحت پیچش و گشتاور خمشی کار انجام شده به شکل زیر محاسبه می گردد.

$$W = \int_0^{\phi_1} T d\phi$$

$$W = \int_0^{\theta_1} M d\theta$$



چگالی انرژی کرنشی

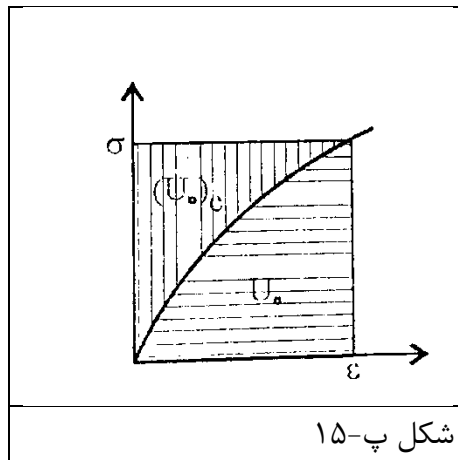
انرژی کرنشی بر واحد حجم را چگالی انرژی کرنشی می نامند و با تقسیم بر حجم ($V=AL$) و دانستن

$$\sigma = \frac{P}{A} \text{ و } d\varepsilon = \frac{d\delta}{L} \text{ برای چگالی انرژی کرنشی } U_0 \text{ داریم.}$$

$$U_0 = \int_0^{\varepsilon_1} \sigma d\varepsilon$$

به همین ترتیب چگالی انرژی متمم برابر است با :

$$(U_0)_C = \int_0^{\sigma_1} \varepsilon d\sigma$$



در حالتی که رابطه تنش و کرنش خطی باشد چگالی انرژی کرنشی و چگالی انرژی متمم با هم برابر و مساوی با $\frac{1}{2} \sigma \varepsilon$ هستند.

اگر ماده از قانون هوک پیروی کند ($\sigma = E\varepsilon$) یعنی داریم:

$$U_0 = \int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon} E\varepsilon d\varepsilon = \frac{1}{2} E\varepsilon^2 = \frac{\sigma^2}{2E}$$

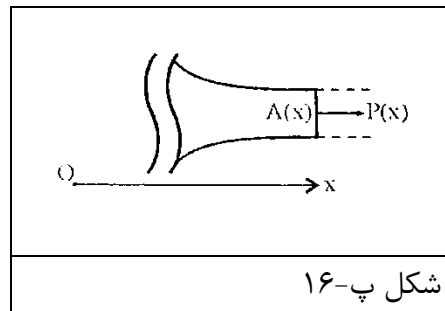
بنابراین انرژی کرنشی جسمی که تحت تنش محوری σ_X در جهت X قرار داشته باشد برابر است با :

$$U = \int_V U_0 dV = \int_V \frac{\sigma_x^2}{2E} dV = \int_V \frac{E\varepsilon_x^2}{2} dV$$

انرژی کرنشی میله تحت نیروی محوری

در صورتی که میله ای به طول L تحت نیروی $P(X)$ در فاصله X از مبدا با سطح مقطع $A(X)$ قرار داشته باشد داریم:

$$U = \int_0^L \frac{P^2(x)}{2EA(x)} dx$$

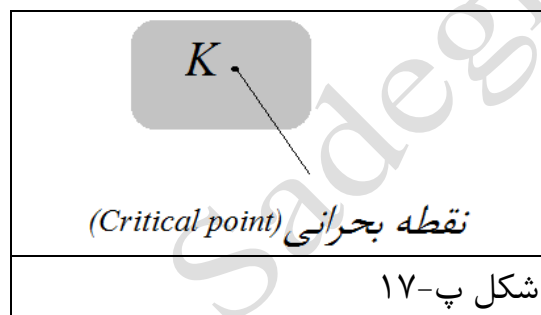


برای میله به طول L با بار ثابت P و سطح مقطع ثابت A داریم :

$$U = \frac{P^2 L}{2AE}$$

معیارهای تسلیم

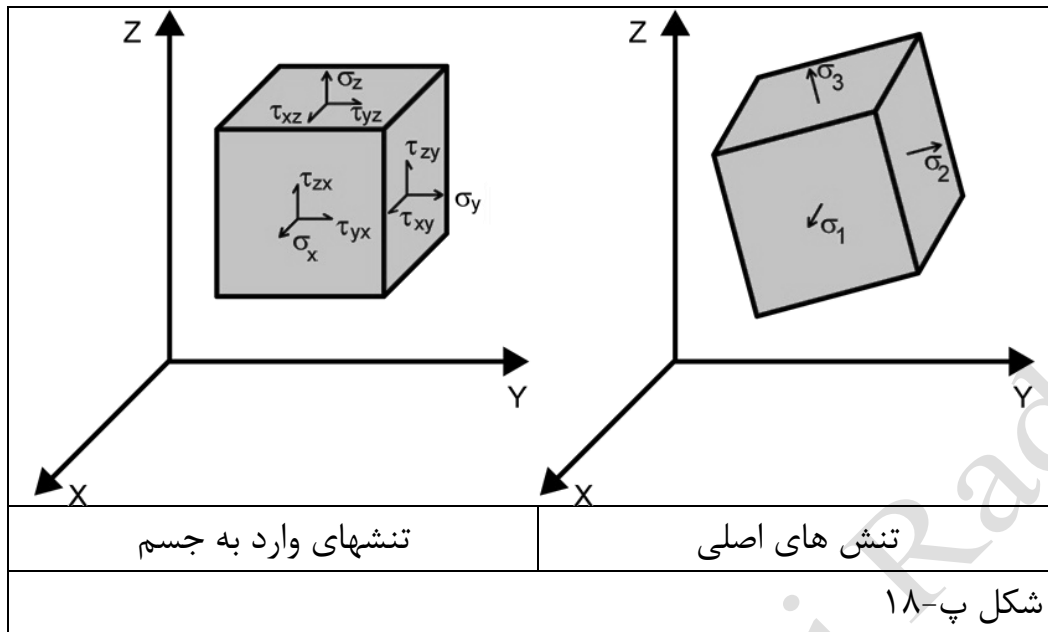
ابتدا باید نقطه بحرانی جسم را پیدا کرد



پس از پیدا کردن نقطه بحرانی تنشهای اصلی وارد بر جسم را پیدا می کنیم

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \rightarrow [\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

و فرض می کنیم $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$



معيار تنش محوری حداکثر (Rankin)

در نتیجه تسلیم رخ نمی دهد: $|\sigma_1| = \sigma_{\max} < \sigma_{\text{critical}} \rightarrow F.S. > 1$ اگر

در نتیجه تسلیم رخ می دهد: $|\sigma_1| = \sigma_{\max} > \sigma_{\text{critical}} \rightarrow F.S. < 1$ اگر

$$\sigma_{\text{critical}} = \sigma_0 = \frac{\sigma_{yp}}{F.S.} = \sigma_{\text{all}} \quad \text{معمولا داریم}$$

معيار ترسکا (Tresca)

تسلیم رخ نمی دهد: $\tau_{\max} < \tau_{\text{critical}} \rightarrow F.S. > 1$ اگر

تسلیم رخ می دهد: $\tau_{\max} > \tau_{\text{critical}} \rightarrow F.S. < 1$ اگر

آستانه تسلیم: $\tau_{\max} = \tau_{\text{critical}} \rightarrow F.S. = 1$ اگر

که در آن:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$$

$$\tau_{\text{critical}} = \frac{0.5\sigma_{yp}}{F.S.}$$

و همچنین برای بدست آوردن ضریب اطمینان داریم:

$$F.S. = \frac{0.5\sigma_{yp}}{\tau_{\max}}$$

معیارهای انرژی (Von-Mises):

تنش فن-مایز سه بعدی را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\sigma' = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}{2}}$$

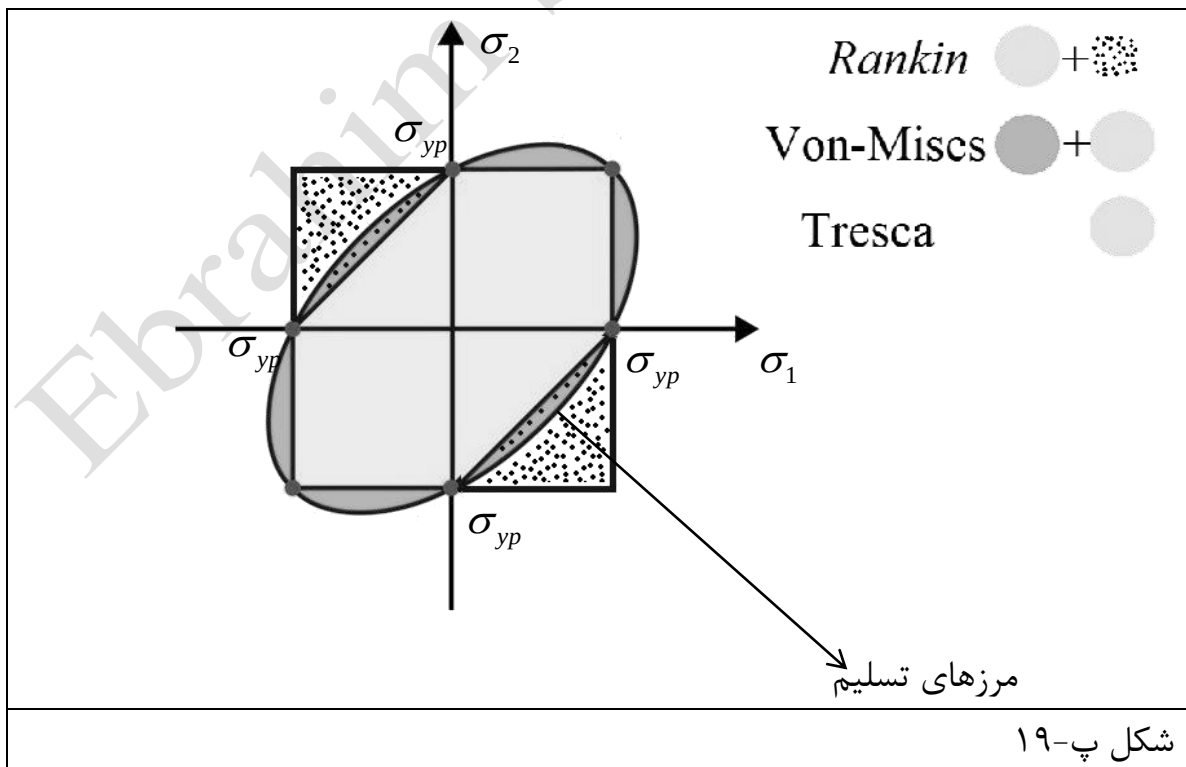
و در نهایت داریم:

$$\sigma' < \frac{\sigma_{yp}}{F.S.} \rightarrow \text{تسلیم رخ نمی دهد}$$

$$\sigma' > \frac{\sigma_{yp}}{F.S.} \rightarrow \text{تسلیم رخ می دهد}$$

و برای محاسبه ضریب اطمینان داریم:

$$F.S. = \frac{\sigma_{yp}}{\sigma'}$$



روش های تعیین رفتار مکانیکی مواد فلزی :

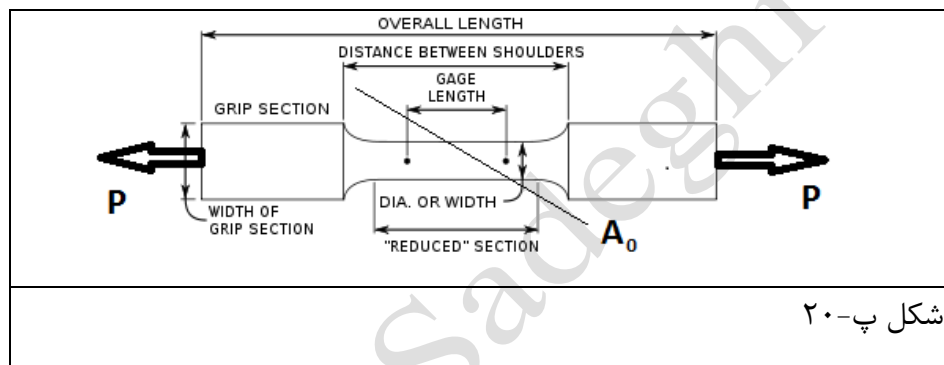
(۱) منحنی تنش-کرنش $(\sigma - \epsilon)$

(۲) اندازه گیری درصد افزایش طول $(\%EL)$ و درصد کاهش سطح مقطع $(\%AR)$

(۳) اندازه گیری سختی (Hardness) (σ_{ts})

(۴) اندازه گیری انرژی تغییر شکل (U_R, U_T) (Toughness)

آزمایش کشش ساده :



شکل پ-۲۰

دیدگاه مهندسی :

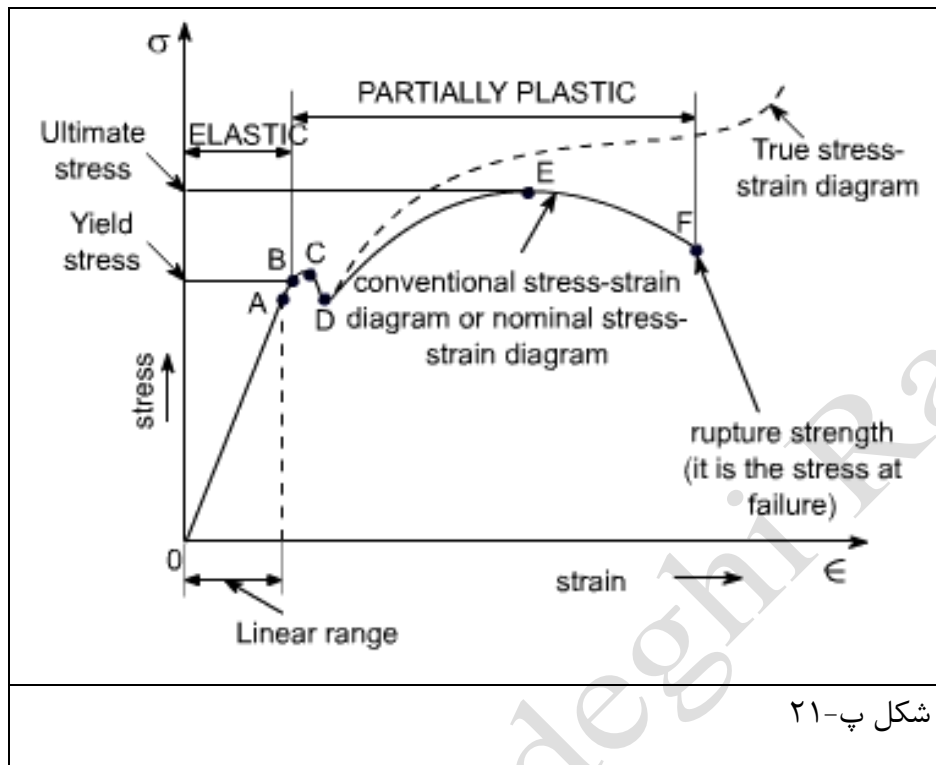
$$\sigma_e = \frac{P}{A_0} \quad \text{تنش مهندسی :} \quad \text{و} \quad \epsilon_e = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{L - L_0}{L_0} \quad \text{کرنش مهندسی :}$$

دیدگاه واقعی:

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad \text{تنش واقعی :} \quad \text{و} \quad \epsilon = \int_{L_0}^L \frac{dl}{l} = \ln\left(\frac{L}{L_0}\right) \quad \text{کرنش واقعی :}$$

که در آن A سطح مقطع قطعه در هر لحظه می باشد.

منحنی تنش-کرنش ($\sigma - \epsilon$)



شکل پ-۲۱

بررسی نقاط روی نمودار:

A، حد تناسب: که قانون هوک تا آن نقطه برقرار است ($\sigma = E \epsilon$)

B، حد الاستیک: تا این نقطه پس از بار برداری ماده به حالت اولیه ی خود باز میگردد

C, D، نقطه تسلیم: در این ناحیه تغییر شکل ها دایمی بوده و با باربرداری به حالت اولیه باز نخواهد گشت

چون نقطه ی B و C معمولاً خیلی نزدیک به هم هستند آنها را یکی در نظر میگیرند.

اما در برخی مواد برای تعیین نقطه ی تسلیم و تنش تسلیم خط موازی خط OA رسم میکنند که در آن ϵ ۰,۲٪ می باشد.

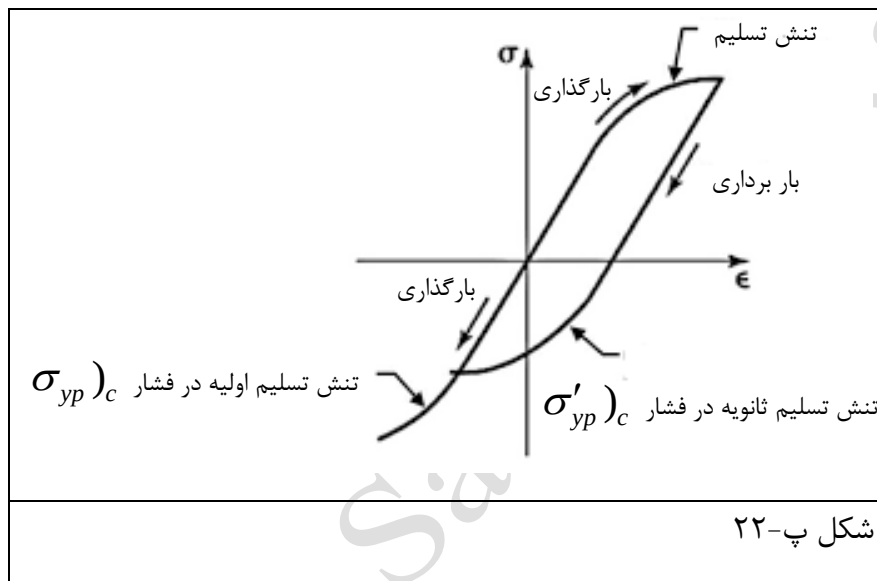
E، افزایش بیشتر بار موجب تغییر شکل های بزرگتر خواهد شد، بیشترین مقدار باری که نمونه بدون

شکست تحمل میکند را تنش نهایی میگویند.

F، نقطه ای که ماده در آن میشکند.

کارسختی (Hardening): بارگذاری و باربرداری در ناحیه ی پلاستیک را کار سختی گویند و موجب تغییر رفتار ماده از ماده ی نرم به ماده ی ترد می گردد و پس از چند بار بارگذاری و باربرداری جسم خواهد شکست.

نکته: مواد نرم تا مرز تسلیم در کشش و فشار رفتار یکسانی از خود نشان می دهند پس از بارگذاری و باربرداری و تغییر بار کششی به حالت فشاری نقطه ی تسلیم کاهش می یابد.



یعنی داریم:

$$\sigma_{yp})_c > \sigma'_{yp})_c$$

نکته: وجود ناحیه ی گلویی شدن نشان دهنده ی ترد نبودن ماده یعنی نرم بودن آن است.

نکته: در مواد ترد مقاومت در فشار بیشتر از کشش است یعنی:

$$\sigma_{uc} > \sigma_{ut}$$

روش های تعیین رفتار مکانیکی مواد فلزی:

۲) اندازه گیری درصد افزایش طول (%EL) و درصد کاهش سطح مقطع (%AR)

$$\%EL = \frac{L_f - L_0}{L_0} * 100$$

$$\%AR = \frac{A_f - A_0}{A_0} * 100$$

نکته: در ناحیه الاستیک تغییرات حجم برابر صفر است یعنی:

$$\Delta V = 0$$

و از طرفی برای کرنش حجمی داریم:

$$e = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{\Delta V}{V_0}$$

پس داریم:

$$e = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$$

و با ثابت بودن حجم در ناحیه الاستیک داریم:

$$AL = \text{constant} \rightarrow dA * L + A * dl = 0$$

$$\rightarrow \frac{dA}{A} = -\frac{dl}{l}$$

پس می توان رفتار مکانیکی فلزات را با روش (%EL) و (%AR) معین کرد.

اگر $\%EL > 5\%$ ماده نرم است و اگر $\%EL < 5\%$ ماده ترد است

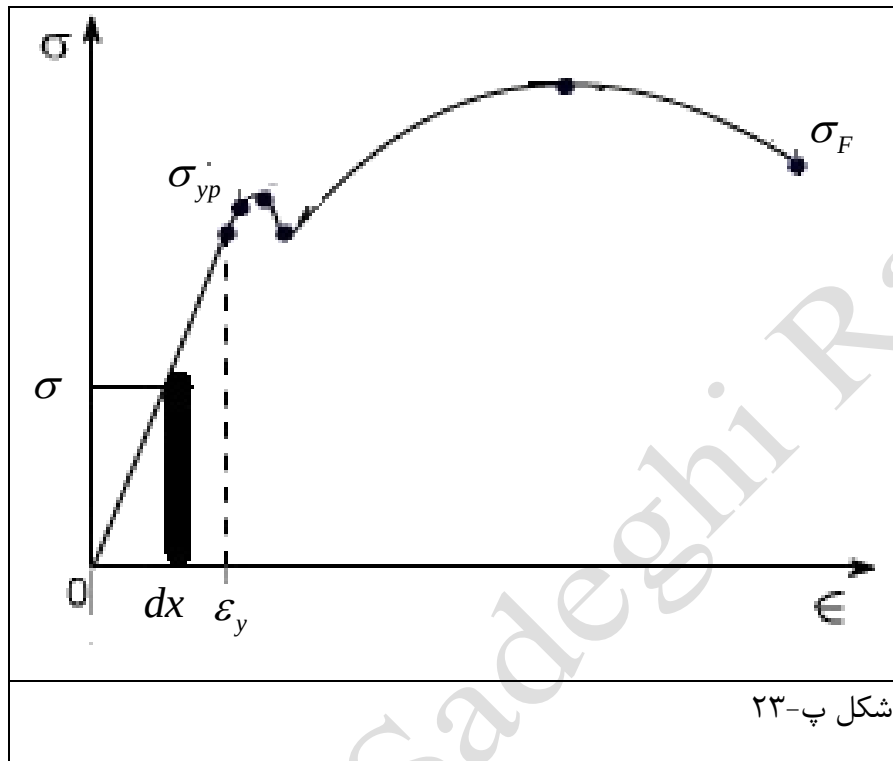
۳) اندازه گیری سختی (Hardness) (σ_{ts})

سختی برینل را با H_B نشان می دهند و داریم $\sigma_u \propto H$ و نهایتاً داریم

$$\sigma_u = K * H_B$$

که در آن K ضریبی با واحد MPa یا Psi می باشد

(۴) اندازه گیری انرژی تغییر شکل (Toughness) (U_R, U_T)



u را چگالی انرژی کرنشی می نامند و به صورت زیر تعریف میکنند

$$u = \int_0^{\varepsilon_y} \sigma d\varepsilon$$

در صورت حضور در ناحیه الاستیک طبق قانون هوک داریم $\sigma = E \varepsilon$ با جایگذاری در رابطه بالا داریم

$$\rightarrow u_R = \int_0^{\varepsilon_y} E \varepsilon d\varepsilon \rightarrow u_R = \frac{E \varepsilon_y^2}{2} = \frac{\sigma_y^2}{2E}$$

که در آن u_R مدول برجهندگی نام دارد.

اگر بازه انتگرال را تا کرنش و تنش نهایی ادامه دهیم داریم:

$$u_T = \int_0^{\varepsilon_y} \sigma.d\varepsilon$$

که در آن u_T چقرمگی (toughness) نام دارد

Ebrahim Sadeghi Rad