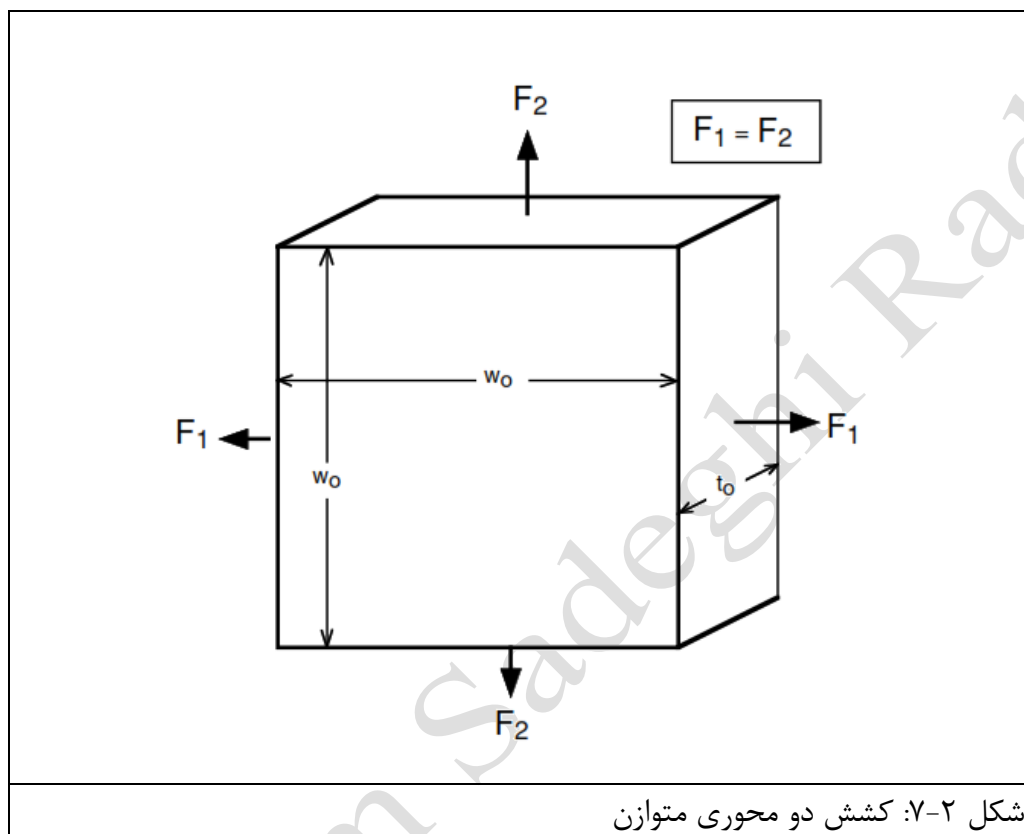


جلسه سوم

کشش دو محوری متوازن

شکل زیر کشش دو محوری ورقه با $\sigma_1 = \sigma_2$ را نشان می دهد.



هنگامی ناپایداری رخ می دهد که $F_1 = F_2$ با صفر برابر شود:

$$F_1 = \sigma_1 A_1 \rightarrow dF_1 = \sigma_1 dA_1 + A_1 d\sigma_1 = 0$$

یا

$$d\sigma_1 / \sigma_1 = -dA_1 / A_1 = d\varepsilon_1$$

وقتی $\sigma_1 = \sigma_2$ باشد، تنش موثر $\bar{\sigma}$ برابر است با:

$$\bar{\sigma} = \sigma_1 = \sigma_2$$

طبق قوانین شارش داریم:

$$\bar{\varepsilon} = 2\varepsilon_1 = 2\varepsilon_2 = -\varepsilon_3$$

با قرار دادن معادلات قبل نتیجه می شود:

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}} = \frac{\bar{\sigma}}{2}$$

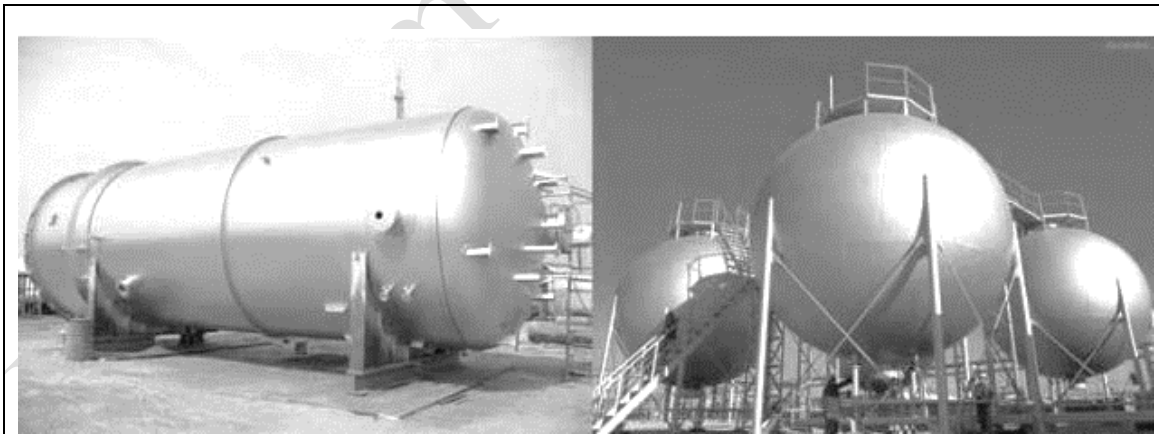
بنابراین در وضعیت ناپایداری:

$$\bar{\sigma} = K\bar{\varepsilon}^n \rightarrow nK\bar{\varepsilon}^{n-1} = \frac{K\bar{\varepsilon}^n}{2} \rightarrow \bar{\varepsilon} = 2n$$

توجه کنید که این کنش دو برابر کنش ناپایداری در حالت کنش تک محوری است.

مخازن جداره نازک

در حالت کلی اگر یک مخزن حاوی گاز بوده و فشار گاز با فشار محیط متفاوت باشد، در مخزن دو نوع تنش طولی و مماسی ایجاد خواهد شد. در این مطلب نحوه محاسبه تنش را در مخازن کره‌ای و استوانه‌ای توضیح خواهیم داد. در شکل زیر این نوع از مخازن نشان داده شده است.



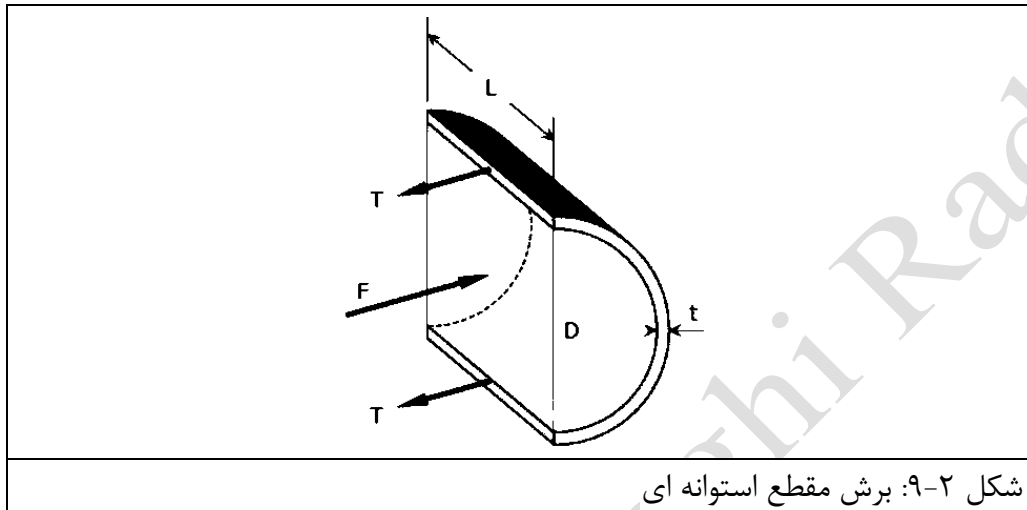
شکل ۲-۸: مخازن جداره نازک

محاسبه تنش در مخازن

به منظور محاسبه تنش در هر سیستمی، در ابتدا باید مقاطع به درستی شناسایی شده و برش زده شوند. برای برآورد تنش در مخازن جدارنازک نیز همین قاعده صادق است.

تنش در مخازن استوانه‌ای

مطابق با شکل زیر مخزنی استوانه‌ای را در نظر بگیرید. فرض کنید این مخزن حاوی گازی با فشار P است. مطابق با شکل زیر قطر و ضخامت این مخزن به ترتیب برابر با D و t و طول آن برابر با L در نظر گرفته شده‌اند. برای بدست آوردن تنش مماسی، مخزن مطابق با شکل زیر برش زده می‌شود.



پوسته در تعادل است؛ بنابراین نیروی ناشی از فشار P با نیروی ناشی از تنش مماسی برابر است. در نتیجه با نوشتن رابطه تعادل داریم:

$$2T = F$$

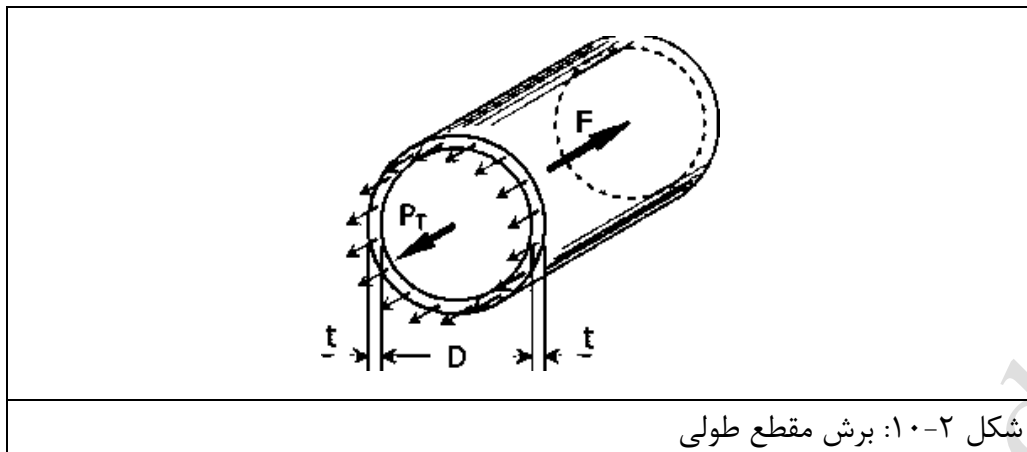
از طرفی نیروی T برابر با حاصل ضرب تنش σ_t در مساحت tL است. بنابراین رابطه فوق را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$2\sigma_t tL = PDL \rightarrow 2\sigma_t t = PD$$

نهایتاً تنش مماسی در یک مخزن جدار نازک استوانه‌ای با فشار P برابر با مقدار زیر بدست می‌آید.

$$\sigma_t = \frac{PD}{2t}$$

برای بدست آوردن تنش طولی کافی است تا مخزن استوانه‌ای مطابق با شکل زیر، به صورت عمود به طول استوانه برش زده شود.



مطابق با شکل فوق، نیروی وارد به انتهای استوانه برابر است با:

$$F = PA = P \frac{\pi D^2}{4}$$

از طرفی تنش طولی تنها روی بخش جدار نازک اعمال می‌شود. مساحت این قسمت برابر با $A = \pi Dt$ است. از این رو نیروی ناشی از تنش طولی نیز برابر است با:

$$P_T = \sigma_L \pi Dt$$

در مرحله بعد معادله تعادل نیرویی را به صورت زیر بیان می‌کنیم.

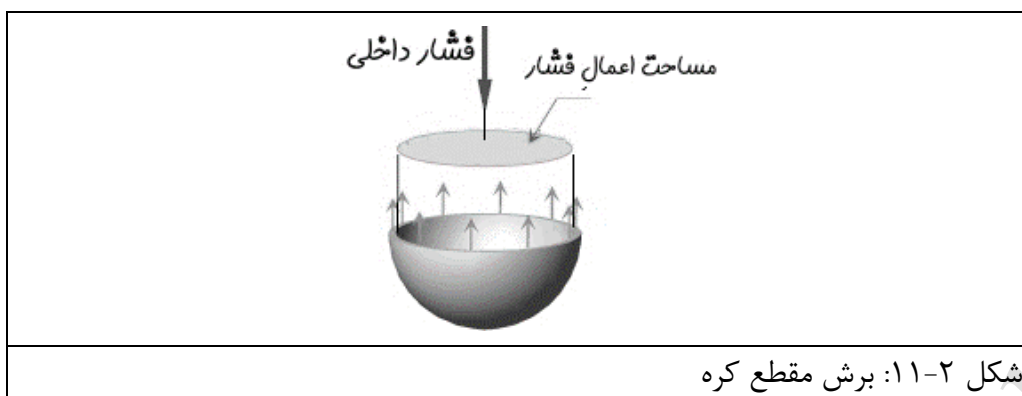
$$\Sigma F_H = 0 \rightarrow P_T = F$$

نهایتاً تنش طولی به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\sigma_L \pi Dt = P \frac{\pi D^2}{4} \rightarrow \sigma_L = \frac{PD}{4t}$$

تنش در مخازن کروی

به دلیل متقارن بودن شکل کره نسبت به تمامی محورهایی که از مرکز آن عبور می‌کنند، تنش در پوسته یک مخزن کروی، در تمامی جهات با هم برابر هستند. از این رو به منظور محاسبه تنش، تنها کافی است تا مطابق با شکل زیر، کره را در جهتی دلخواه برش بزنید.



نیروی داخلی ناشی از فشار که به نیمکره وارد می‌شود، برابر است با:

$$F = P \frac{\pi D^2}{4}$$

این نیرو برابر با تنش است که به جداره وارد می‌شود. بنابراین می‌توان گفت:

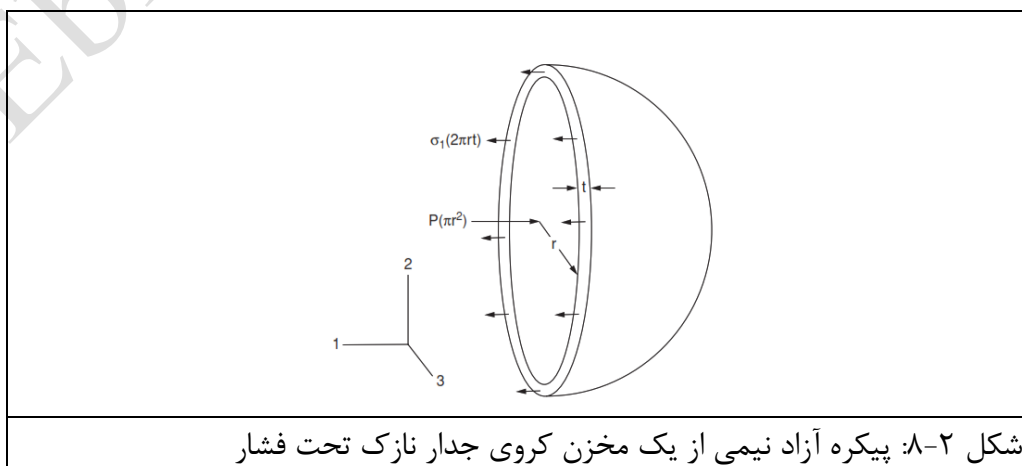
$$P_T = F \rightarrow \sigma \pi D t = P \frac{\pi D^2}{4}$$

نهایتاً تنش در جداره یک مخزن کروی با فشار P برابر است با:

$$\sigma = \frac{PD}{4t}$$

ناپایداری در کره جدار نازک تحت فشار

شکل زیر نمودار پیکره آزاد نیمی از یک مخزن کروی جدار نازک تحت فشار است



موازنه نیرو در جهت "1" نشان می دهد که $P\pi r^2 = 2\pi r t \sigma_1$ که در آن P فشار داخلی t, r شعاع و ضخامت جداره هستند، بنابراین:

$$P = \frac{2t\sigma_1}{r}$$

فشار ماکزیمم متناظر است با:

$$dP = 0 \rightarrow \frac{2td\sigma_1}{r} + \frac{2\sigma_1 dt}{r} - \frac{2t\sigma_1 dr}{r^2} = 0$$

با قرار دادن $d\varepsilon_1 = d\varepsilon_2 = -d\varepsilon_3 / 2$ و $dt/t = d\varepsilon_3, dr/r = d\varepsilon_1$ نتیجه می شود:

$$\frac{d\sigma_1}{\sigma_1} = -(3/2)d\varepsilon_3$$

با جایگزینی $\bar{\sigma} = \sigma_1$ و $d\bar{\varepsilon} = -d\varepsilon_3$ نتیجه می شود:

$$d\bar{\sigma} / \bar{\sigma} = (3/2)d\bar{\varepsilon} \quad \text{یا} \quad d\bar{\sigma} / d\bar{\varepsilon} = (3/2)\bar{\sigma}$$

بر اساس قانون توانی کرنش سختی، ناپایداری در وضعیت زیر رخ می دهد:

$$\bar{\varepsilon} = (2/3)n$$

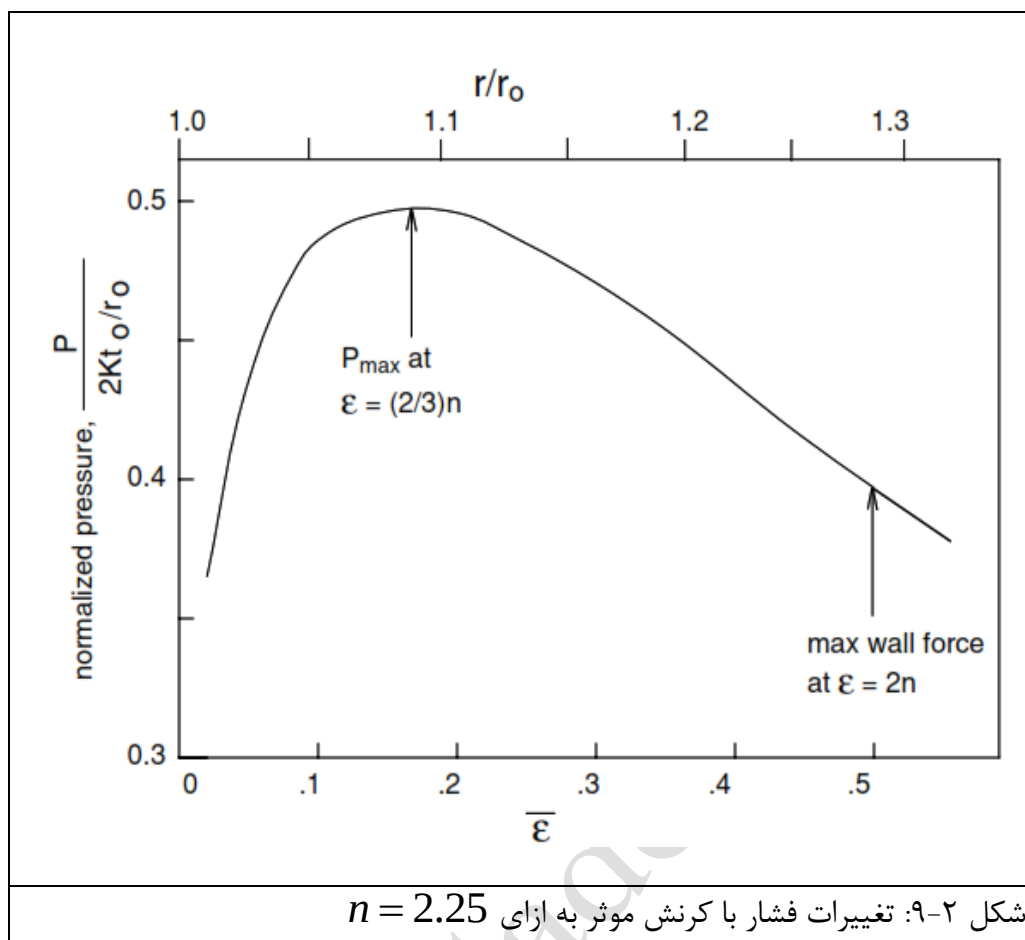
با قرار دادن $\bar{\sigma} = K\bar{\varepsilon}^n$ و $r = r_0 e^{\varepsilon_1} = r_0 e^{-\bar{\varepsilon}/2}$ ، $t = t_0 e^{\varepsilon_3} = t_0 e^{-\bar{\varepsilon}}$ نتیجه می شود:

$$P = 2K\bar{\varepsilon}^n \frac{t_0}{r_0} e^{(-1/2)\bar{\varepsilon}}$$

dP را مساوی صفر قرار می دهیم و داریم:

$$P_{\max} = 2K(3/2n)^n e^{-n}$$

نمودار زیر تغییر فشار با $r, \bar{\varepsilon}$ را نشان می دهد.



مفهوم ناپایداری

در این فصل شرایط ناپایدار به نیرو یا فشار ماکزیمم مربوط می‌شدند. اما معمولاً تغییر شکل یکنواخت در نیرو یا فشار ماکزیمم چنان که در آزمون کشش دیدیم متوقف نمی‌شود. دوباره کره جدار نازک تحت فشار داخلی را در نظر بگیرید. اگرچه ماکزیمم فشار هنگامی ایجاد می‌شود که $\bar{\epsilon} = (2/3)n$ ، موضعی شدن کرنش رخ نمی‌دهد زیرا موضعی شدن سبب کاهش شعاع انحنای موضعی می‌شود و در نتیجه تنش در آن ناحیه به مقداری پایین‌تر از سایر نواحی کره کاهش می‌یابد. در عوض انبساط یکنواخت کره ادامه می‌یابد.

جداره کره تحت تنش دو محوری است بطوری که نیروی ماکزیمم جدار هنگامی ایجاد می‌شود که $\bar{\epsilon} = 2n$ بازهم موضعی شدن کرنش نمی‌تواند رخ دهد زیرا هر نوع موضعی شدن سبب کاهش شعاع انحنا می‌شود که در شکل نشان داده شد.

هر نوع موضعی شدن کرنش در شرایط تنش دو محوری، به سبب ناهمگنی موضعی رخ می‌دهد.