

جلسه دهم

مثال

ورق فلزی به ضخامت $2.5mm$ و عرض $25cm$ را می کشیم تا ضخامت آن به $2.25mm$ برسد، زاویه راس حدیده 30° است تنش شارش $200MPa$ و ضریب اصطکاک 0.08 است. مطلوب است محاسبه نیروی کشش با استفاده از معیار فون مایز.

حل

با دانستن زاویه راس حدیده داریم:

$$B = \mu \cot \alpha = 0.08 \cot(15^\circ) = 0.299$$

برای کرنش همگن داریم:

$$\varepsilon_h = \ln(2.5 / 2.25) = 0.1054$$

نهایتاً با استفاده از آخرین معادله میتوان نوشت:

$$\sigma_d = 1.15(200)(1.299 / 0.299) [1 - \exp(-0.299 * 0.1054)] = 31MPa$$

و

$$F_d = 31MPa(0.25)(0.0225) = 175KN$$

توجه کنید که اگر اصطکاک برابر با صفر بود ($\mu = 0 \rightarrow B = 0$) با استفاده از قاعده هوپیتال می توان نشان داد که

$$\frac{\sigma_d}{2k} = \varepsilon_h$$

که دقیقاً همان نتیجه ای است که برای موازنه کار پیش بینی شد.

کشش سیم و مفتول

ساکس (*Sachs*) کشش سیم یا مفتول را به روشی مشابه تحلیل کرد. معادله دیفرانسیل پایه عبارت است از:

$$\frac{d\sigma}{B\sigma - (1+B)\bar{\sigma}} = 2 \frac{dD}{D}$$

که در آن D قطر مفتول یا سیم است با توجه به اینکه داریم:

$$2 \frac{dD}{D} = -d\varepsilon$$

با انتگرال گیری نتیجه می شود:

$$\int_0^{\sigma_d} \frac{d\sigma}{B\sigma - (1+B)\bar{\sigma}} = -\int_0^{\varepsilon_h} d\varepsilon \rightarrow \sigma_d = \sigma_a \left(\frac{1+B}{B} \right) [1 - \exp(-B\varepsilon_h)]$$

که در آن σ_a تنش شارش متوسط ماده در حیدیه است.

در این تحلیل از کرنش اضافی چشم پوشی می شود. که همان محدودیت های کشش به حالت کرنش صفحه در بخش قبل را دارد و با افزایش زاویه حیدیه و پایین آمدن میزان کاهش سطح، نتایج دور از واقع حاصل می شود.

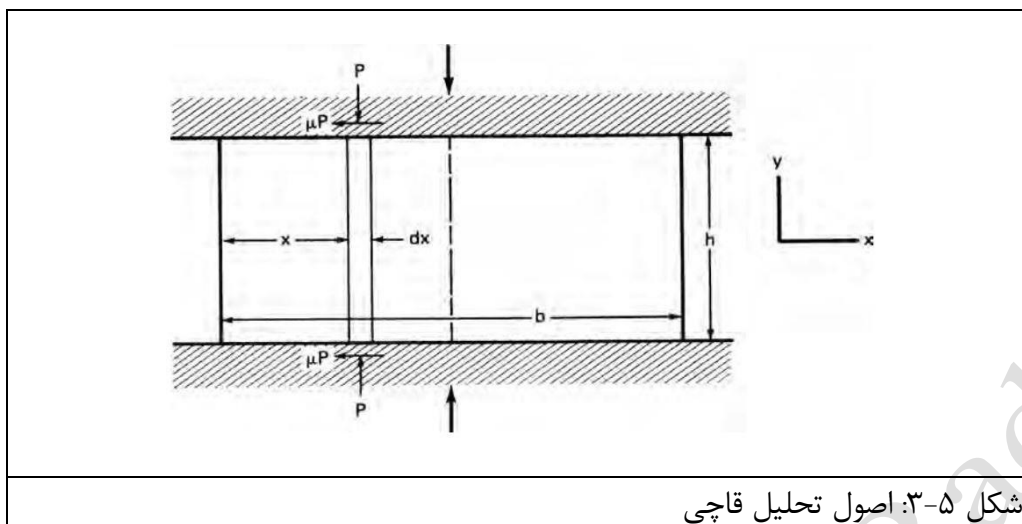
اصطکاک در فشردن به حالت کرنش صفحه ای

از تحلیل قچی برای فشردن به حالت کنونی صفحه نیز می توان استفاده کرد. در شکل زیر نمونه ای با $b > h$ نشان داده شده است که با ضریب اصطکاک ثابت μ فشرده می شود. با نوشتن موازنه نیروی جزء المان داریم:

$$\sigma_x h + 2\mu P dx - (\sigma_x + d\sigma_x)h = 0$$

این رابطه به صورت زیر خلاصه می شود:

$$2\mu P dx = h d\sigma_x$$



باز هم $\sigma_y = -P$ ، σ_x را تنش های اصلی می گیریم و با توجه به اینکه برای کرنش صفحه ای داریم:

$$\sigma_x - \sigma_y = 2k$$

نتیجه می شود:

$$d\sigma_x = dp$$

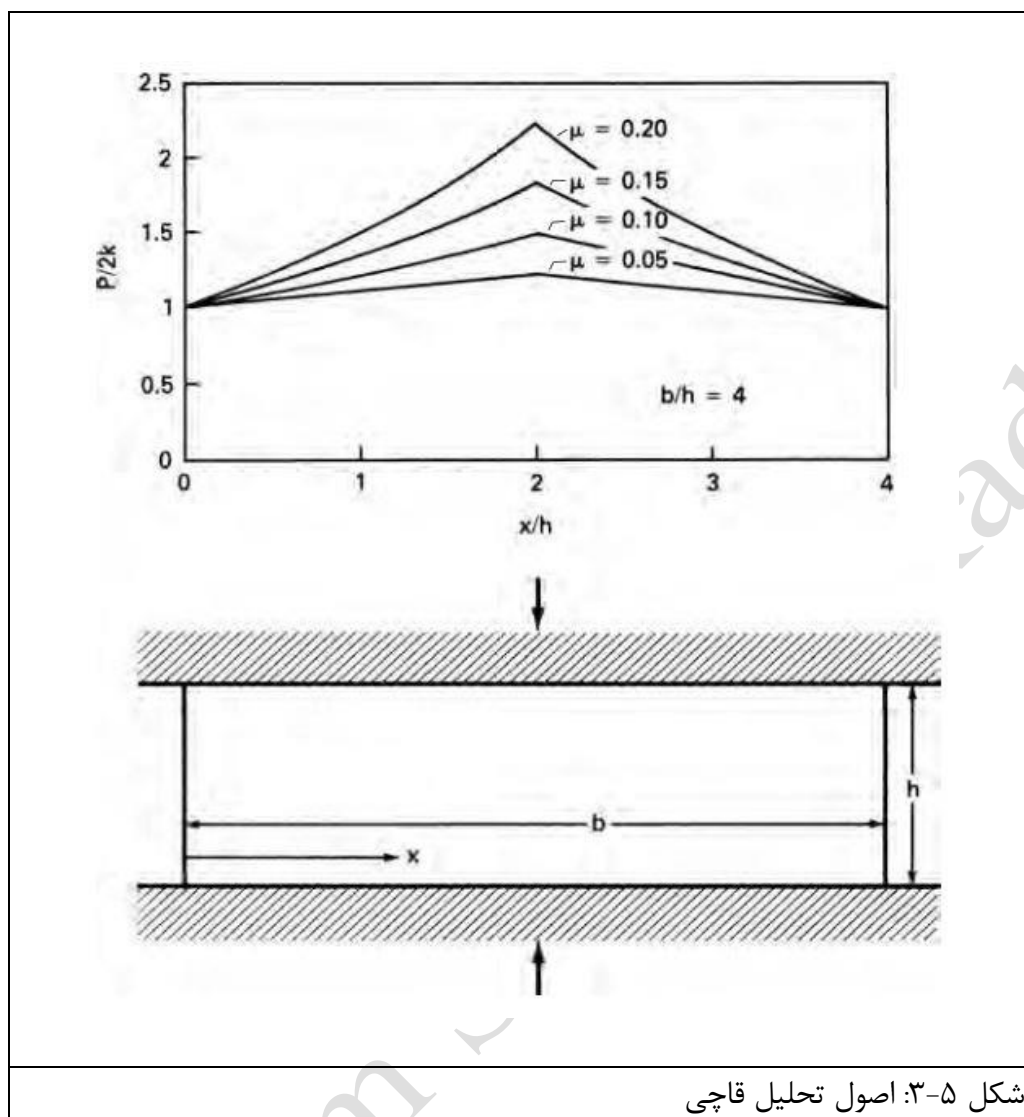
معادله بالا به صورت $2\mu P dx = h dP$ نوشته می شود یا:

$$\frac{dP}{P} = \frac{2\mu dx}{h}$$

با انتگرال گیری از $P = 2k$ در $x = 0$ تا P در x ، نتیجه می شود $\ln(P / 2k) = 2\mu x / h$ یا:

$$\frac{P}{2k} = \exp\left(\frac{2\mu x}{h}\right)$$

این رابطه وجود تپه اصطکاکی را پیش بینی می کند که در شکل زیر نشان داده شده است. این رابطه برای لبه $x = 0$ تا خط مرکزی $x = b/2$ صادق است.



فشار متوسط P_a را می توان با انتگرال گیری از روی نیمی از بلوک برای یافتن نیرو و تقسیم آن بر سطح نیم بلوک به دست آورد:

$$F_y = \int_0^{b/2} P dx = \int_0^{b/2} 2k \exp\left(\frac{2\mu x}{h}\right) dx = 2k \left(\frac{h}{2\mu}\right) \left[\exp\left(\frac{\mu b}{h}\right) - 1 \right]$$

$$\frac{P_{ave}}{2k} = \left(\frac{h}{\mu b}\right) \left[\exp\left(\frac{\mu b}{h}\right) - 1 \right]$$

بسیط دادن $\exp(\mu b / h) - 1 = (\mu b / h) + \frac{(\mu b / h)^2}{2} + \dots$ به ازای مقادیر کوچک $\mu b / h$ جواب تقریبی ساده‌ای حاصل می‌شود:

$$\frac{P_{ave}}{2k} = 1 + \frac{\mu b}{2h}$$

مثال

عملیات فشردن به حالت کرنش صفحه ای روی قاچی از فلز به عرض 20cm ارتفاع 2.5cm و استحکام تسلیم برشی $k = 100\text{MPa}$ انجام می‌شود. با فرض ضریب اصطکاک $\mu = 0.1$ مطلوب است:

الف) تخمین فشار ماکسیموم در آستانه شارش مومسان

ب) تخمین فشار متوسط در آستانه شارش مومسان

حل

الف) با استفاده از معادلات بالا در $x = b / 2$ داریم:

$$P_{\max} = 2k \exp(\mu b / h) = 200 \exp(0.1 * 20 / 2.5) = 45\text{MPa}$$

ب) با استفاده از جواب دقیق معادلات گفته شده داریم:

$$P_{ave} = 200 [2.5 / (0.1)(20)] \{ \exp[(0.1)(0.2) / 2.5 - 1] \} = 253\text{MPa}$$

ب) با استفاده از جواب تقریبی معادلات گفته شده داریم:

$$P_{ave} = 200 \left[1 + \frac{(0.1)(20)}{2(2.5)} \right] = 280\text{MPa}$$